宜宾市普通高中2022级第一次诊断性测试

数学参考答案及评分意见

一、选择题

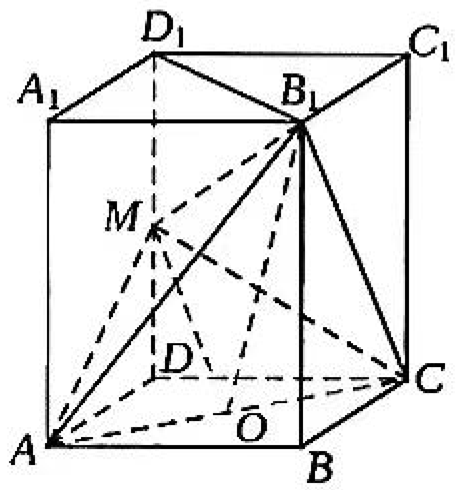
题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
选项	A	B	C	C	A	C	D	B	ABC	AC	BCD

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

12．160　　　13．1　　　14．$300(\sqrt{2}-1)$

四、解答题：本题共5小题，共77分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

15．（13分）



（1）证明：连结B_1D_1，在$\triangle B_1D_1M$中，$B_1D_1=\sqrt{2}$，

$B_1M=\sqrt{3}$，$B_1C=\sqrt{5}$，$MC=\sqrt{2}$，

所以$B_1M^2+MC^2=B_1C^2$，于是$B_1M\perp MC$，

同理可证$B_1M\perp AM$，又$MA\cap MC=M$

所以$B_1M\perp$平面AMC，又$B_1M\subset$平面B_1MC

所以平面$B_1MC\perp$平面AMC；…………………………………………………… 6分

（2）解：取AC的中点O，连结OM，OB_1，

因为$MC=MA=\sqrt{2}$，$B_1A=B_1C=\sqrt{5}$

所以，$OM\perp AC$，$OB_1\perp AC$，

所以平面MAC与平面B_1AC的夹角为$\angle B_1OM$，………………………………… 10分

在$Rt\triangle B_1OM$中，$B_1O=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，$MO=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，

所以，$\cos\angle B_1OM=\dfrac{OM}{OB}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$…………………………………………………… 12分

平面MAC与平面B_1AC的夹角的余弦值$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．…………………………………………… 13分

16．（15分）

解：（1）该射手恰好命中一次的概率

$P=C_2^1\times\dfrac{3}{4}\times(1-\dfrac{3}{4})\times(1-\dfrac{1}{4})+(1-\dfrac{3}{4})^2\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{19}{64}$…………………………………………6分

（2）该射手的总得分 X 的所有可能取值为：0，1，2，3，4……………………7分

所以 $P(X=0)=(1-\frac{3}{4})^2\times(1-\frac{1}{4})=\frac{3}{64}$

$P(X=1)=C_2^1\times\frac{3}{4}\times(1-\frac{3}{4})\times(1-\frac{1}{4})=\frac{18}{64}$

$P(X=2)=(\frac{3}{4})^2\times(1-\frac{1}{4})+(1-\frac{3}{4})^2\times\frac{1}{4}=\frac{28}{64}$

$P(X=3)=C_2^1\times\frac{3}{4}\times(1-\frac{3}{4})\times\frac{1}{4}=\frac{6}{64}$

$P(X=4)=(\frac{3}{4})^2\times\frac{1}{4}=\frac{9}{64}$ ……………………………………………………12分

于是，X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{3}{64}$	$\frac{18}{64}$	$\frac{28}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{9}{64}$

…………………………………………………………………………………………13分

所以，$E(X)=0\times\frac{3}{64}+1\times\frac{18}{64}+2\times\frac{28}{64}+3\times\frac{6}{64}+4\times\frac{9}{64}=2$ ……………………15分

17．（15分）

解：（1）$f(x)=\sqrt{3}\sin 2x-2\sin^2 x+1=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$ ……3分

所以 $f(A)=2\sin(2A+\frac{\pi}{6})=1$

即 $\sin(2A+\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$，………………………………………………………4分

又因为 $0<A<\frac{\pi}{2}$，所以 $\frac{\pi}{6}<2A+\frac{\pi}{6}<\frac{7\pi}{6}$ ……………………………………6分

所以 $A=\frac{\pi}{3}$ ……………………………………………………………………7分

（2）在 $\triangle ABC$ 中，$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，即 $\frac{a}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{\sin B}=\frac{c}{\sin(B+\frac{\pi}{3})}$

所以 $a=\frac{\sqrt{3}}{2\sin B}$，$c=\frac{\sin(B+\frac{\pi}{3})}{\sin B}$ …………………………………………9分

所以 $4a^2-2c=\frac{3}{\sin^2 B}-\frac{2\sin(B+\frac{\pi}{3})}{\sin B}=\frac{3}{\tan^2 B}-\frac{\sqrt{3}}{\tan B}+2$ ……………………10分

因为$\frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{2}$，所以$\tan B>\frac{\sqrt{3}}{3}$，$0<\frac{1}{\tan B}<\sqrt{3}$ ……………………12分

设$t=\frac{1}{\tan B}\in(0,\sqrt{3})$，于是$4a^2-2c=3t^2-\sqrt{3}t+2(0<t<\sqrt{3})$ ………………14分

可得：$4a^2-2c\in[\frac{7}{4},8)$ ……………………………………………………15分

法二 由余弦定理可知：$a^2=1+c^2-2c\cos A=c^2-c+1$，由几何图形可知（$\frac{1}{2}<c<2$）

所以$4a^2-2c=4(c-\frac{3}{4})^2+\frac{7}{4}$易得$4a^2-2c\in[\frac{7}{4},8)$.

18．（17分）

解：（1）由题可得$\begin{cases}\frac{5}{4a^2}-\frac{1}{b^2}=1\\ a^2+b^2=c^2\\ \frac{c}{a}=\sqrt{5}\end{cases}$解得a=1¿b=2¿¿¿¿

故双曲线方程为$x^2-\frac{y^2}{4}=1$ ……………………………………………………4分

（2）①设直线l_1的方程为：$x=my+\sqrt{5}(m\neq0)$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),Q(x_3,y_3)$

联立方程x=my+√5¿¿¿¿可得 …… $4m^2-1)y^2+8\sqrt{5}my+16=0$ ¿

$\Delta=320m^2-64(4m^2-1)=64m^2+64>0$, $4m^2-1\neq0$ 且 $=-\frac{8\sqrt{5}m}{4m^2-1}$¿¿¿

故$y_3=\frac{y_1+y_2}{2}=-\frac{4\sqrt{5}m}{4m^2-1}$, $x_3=my_3+\sqrt{5}=\frac{-\sqrt{5}}{4m^2-1}$ ……………………………6分

由于直线l_1与双曲线的左右两支相交，所以方程(¿)有两个同号的实根

故$y_1y_2=\frac{16}{4m^2-1}>0\Rightarrow4m^2-1>0$

由O,Q,M三点共线得：$\frac{y_0}{x_0}=\frac{y_M}{x_M}=4m$ ………..(i)

由 $MF \perp l_1$ 得: $\frac{y_M - 0}{x_M - \sqrt{5}} \cdot \frac{1}{m} = -1$ ....(ii)

由(i).(ii)解得：$M\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{4m}{\sqrt{5}}\right)$ ....9 分

显然点 M 的横坐标为定值，纵坐标随 m 变化而变化

故点 M 过定直线 $x = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ....10 分

②由 $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ 可知，四边形 $MANB$ 是平行四边形，

所以 $S_{MANB} = 2S_{\Delta_{MAB}} = d_{M\ l_1}|AB|$ ，$d_{M-l_1} = \frac{\left|\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{4m^2}{\sqrt{5}} - \sqrt{5}\right|}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}}\sqrt{1+m^2}$

$|AB| = \sqrt{1+m^2}|y_1 - y_2| = \sqrt{1+m^2} \cdot \frac{8\sqrt{1+m^2}}{|4m^2-1|} = \frac{8(m^2+1)}{4m^2-1}$ ，因为 $4m^2 - 1 > 0$

$S_{MANB} = \frac{4}{\sqrt{5}}\sqrt{1+m^2} \cdot \frac{8(1+m^2)}{4m^2-1}$. ....13 分

令 $t = \sqrt{1+m^2}, m^2 = t^2 - 1, t > 1$ ，则 $S_{MANB} = \frac{32}{\sqrt{5}} \cdot \frac{t^3}{4t^2 - 5} = \frac{32}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\frac{4}{t} - \frac{5}{t^3}}$

令 $f(t) = \frac{4}{t} - \frac{5}{t^3}\ (t > 1)$

则 $f'(t) = \frac{15 - 4t^2}{t^4} = \frac{(\sqrt{15} + 2t)(\sqrt{15} - 2t)}{t^4}$

所以 $f(t)$ 在 $\left(1, \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$ 单调递增，在 $\left(\frac{\sqrt{15}}{2}, +\infty\right)$ 单调递减，

故 $f(t)_{\max} = f\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right) = \frac{16}{3\sqrt{15}}$ ....15 分

此时四边形 $MANB$ 面积取到最小值为 $S_{MANB} = \frac{32}{\sqrt{5}} \times \frac{3\sqrt{15}}{16} = 6\sqrt{3}$ ，

当且仅当 $t = \frac{\sqrt{15}}{2}$, 即 $m = \pm\frac{\sqrt{11}}{2}$ 时取等号. ....17 分

19．（17 分）

解：（1）当 $a = 1$ 时，$u(x) = 2\ln x - x^2 + 1, (x > 0)$. $u'(x) = \frac{2}{x} - 2x = \frac{2(1 - x^2)}{x} = \frac{2(1 - x)(1 + x)}{x}$

所以$u'(x)<0\Rightarrow x>1$，$u'(x)>0\Rightarrow 0<x<1$

所以$u(x)$在$(0,1)$单调递增，在$(1,+\infty)$单调递减..4分

（2）① $f(x)=u(x)+v(x)=(2x^2+2)\ln x-a(x^2-1)$

$f'(x)=4x\ln x+(2x^2+2)\cdot\frac{1}{x}-2ax=2x(2\ln x+1+\frac{1}{x^2}-a)$..................................5分

记$g(x)=2\ln x+1+\frac{1}{x^2}-a$，则$f'(x)=2x\cdot g(x)$，$g'(x)=\frac{2}{x}-\frac{2}{x^3}=\frac{2(x+1)(x-1)}{x^3}$

易知$g(x)$在$(0,1)$单调递减，在$(1,+\infty)$单调递增，$g(1)=2-a$..................................6分

若$a\le 2$，则$g(x)\ge g(1)=2-a\ge 0\Rightarrow f'(x)=2xg(x)\ge 0\Rightarrow f(x)$单调递增，无极值点.

若$a>2$，此时$f'(1)=2g(1)<0$..7分

注意到当$x\to+\infty$时$f'(x)\to+\infty$，故$f'(x)=0$在$(1,+\infty)$有一个根x_2

容易证明当$a>2$时$\ln a<a-1$，所以：

$f'(\frac{1}{a})=\frac{2}{a}(a^2-a+1-2\ln a)>\frac{2}{a}[a^2-a+1-2(a-1)]=\frac{2}{a}(a^2-3a+3)>0$

所以$f'(x)=0$在$(\frac{1}{a},1)$上有一个根x_1，故$f(x)$恰有两个极值点，符合题意.

综上实数a的取值范围为$(2,+\infty)$ 10分

方法二：可用参变分离法求解，(阅卷时酌情给分.)

②由上面的讨论可知$0<x_1<1<x_2$，

且$f(x)$在$(0,x_1)$，$(x_2,+\infty)$单调递增，在(x_1,x_2)单调递减，

因为$f(1)=0$从而$f(x_1)>f(1)>0$，同理可得 $f(x_2)<f(1)<0$ 12分

显然$x\to 0$时$f(x)\to-\infty$，$x\to+\infty$时$x\to+\infty$

所以$f(x)$在$(0,x_1)$和$(x_2,+\infty)$上各有一个零点，

结合$f(1)=0$可知$f(x)$共有三个零点..14分

注意到$f(\frac{1}{x})=(2\frac{1}{x^2}+2)\ln\frac{1}{x}-a(\frac{1}{x^2}-1)=\frac{-[(2x^2+2)\ln x-a(x^2-1)]}{x^2}=\frac{-1}{x^2}f(x)$

所以若$f(x_0)=0$，则$f(\frac{1}{x_0})=0$，

故$f(x)$的三个零点可以表示为：$x_0,1,\frac{1}{x_0}$ 16

分

$f(x)$的所有零点之和$x_0+\frac{1}{x_0}+1\ge 2\sqrt{x_0\cdot\frac{1}{x_0}}+1=3$

由于$x_0\neq 1$，所以$f(x)$的所有零点之和大于3 17

分