树德中学高 2022 级高三上学期 11 月半期测试数学试题答案

一、单项选择

C　D　C　C　B　D　D　A

二、多项选择题

AB　BC　ACD

三、填空题

$\frac{1}{3}$　　34　　$\frac{5}{12}$。

四、解答题

15、（1）由教材中，$A=\frac{\pi}{3}$，教材中证明以下恒等式

16. 在△ABC 中，求证：$c(a\cos B-b\cos A)=a^2-b^2$.

（2）$A=\frac{\pi}{3}, S=\frac{1}{2}bc\sin A=\sqrt{3}, \therefore bc=4$,又因为 $a=2$, 由余弦定理知

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A, \therefore 4=b^2+c^2-bc$,故 $b=c=2$

（本题两小问都来自教材，引导教学，立足教材，深耕细作，重视双基，力求腾飞）

16、(1)【详解】(1) 因为平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，且平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，且 $AB\perp AD$，$AB\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $AB\perp$ 平面 PAD，因为 $PD\subset$ 平面 PAD，所以 $AB\perp PD$，

又 $PD\perp PA$，且 $PA\cap AB=A$，PA，$AB\subset$ 平面 PAB，

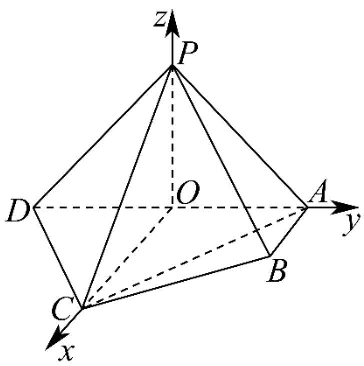
所以 $PD\perp$ 平面 PAB，又 $PD\subset$ 平面 PAD，所以平面 $PCD\perp$ 平面 PAB；

（2）取 AD 中点为 O，连接 CO，PO，

又因为 $PA=PD$，所以 $PO\perp AD$，则 $AO=PO=4$，

因为 $AC=CD=5$，所以 $CO\perp AD$，则 $CO=\sqrt{AC^2-AO^2}=3$，

以 O 为坐标原点，分别以 $\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OP}$ 所在直线为 x，y，z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$，



则 $A(0,4,0)$，$B(2,4,0)$，$C(3,0,0)$，$D(0,-4,0)$，$P(0,0,4)$，

$\overrightarrow{PC}=(3,0,-4)$，$\overrightarrow{PD}=(0,-4,-4)$，$\overrightarrow{PB}=(2,4,-4)$，

设 $\vec{n}=(x,y,z)$ 是平面 PCD 的一个法向量，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PD}=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}3x-4z=0\\ -4y-4z=0\end{cases}$，令 $z=3$，则 $x=4$，$y=-3$，所以 $\vec{n}=(4,-3,3)$，

设点 B 到平面 PCD 的距离为 h .则 $h=\left|\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PB}|}\right|=\left|\frac{-16}{\sqrt{34}}\right|=\frac{8\sqrt{34}}{17}$，

所以点 B 到平面 PCD 的距离为 h 为 $\frac{8\sqrt{34}}{17}$.

（第二问等体积法也可以酌情给分）

17、(1)　$f'(x)=e^x-(a+1)$,当 $a\le -1$，$f(x)$ 在 R 上为单增函数

当 $a>-1$，$f(x)$ 在 $(-\infty,\ln(a+1))$ 单减，$(\ln(a+1),+\infty)$ 单增

(2)由（1）知，当$a<-1$，$f\left(x\right)$在R上为单增函数，$x\to-\infty,f\left(x\right)\to-\infty$不合题意

当$a=-1$，$f\left(x\right)$在R上为单增函数，$x\to-\infty,f\left(x\right)\to0$，故$b\le0,b-a$的最大值为1

当当$a>-1$，$f\left(x\right)$在$\left(-\infty,\ln\left(a+1\right)\right)$单减，$\left(\ln\left(a+1\right),+\infty\right)$单增

所以$f\left(x\right)$**在**$x=\ln\left(a+1\right)$**处取得极小值，**

也是最小值为$f\left(\ln\left(a+1\right)\right)=\mathrm{e}^{\ln\left(a+1\right)}-\left(a+1\right)\ln\left(a+1\right)-b=\left(a+1\right)-\left(a+1\right)\ln\left(a+1\right)-b$**，**

由不等式$\mathrm{e}^{x}-\left(a+1\right)x\ge b$**，可得**$\left(a+1\right)-\left(a+1\right)\ln\left(a+1\right)-b\ge0$**，**

所以$b-a\le1-\left(a+1\right)\ln\left(a+1\right)$**，**

令$F\left(x\right)=1-x\ln x\left(x>0\right)$**，则**$F'\left(x\right)=-\ln x-1$**，**

当$0<x<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$**时，**$F'\left(x\right)>0$**；当**$x>\dfrac{1}{\mathrm{e}}$**时，**$F'\left(x\right)<0$**，**

所以$F\left(x\right)$**在**$\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$**上单调递增，在**$\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$**上单调递减，**

即$F\left(x\right)_{\max}=F\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)=1+\dfrac{1}{\mathrm{e}}$**，即**$b-a\le1+\dfrac{1}{\mathrm{e}}$**，所以**$b-a$**的最大值为**$1+\dfrac{1}{\mathrm{e}}$**.**

故答案为：$1+\dfrac{1}{\mathrm{e}}$**.**

18、解答：(1)由于A,B关于x轴对称，　故A,B同时在Γ上.　　$\Gamma:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a\ne b)$

若A,B,C在Γ上，　则$\begin{cases}\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{(\frac{3}{2})^2}{b^2}=1\\ \dfrac{(-\frac{3}{5})^2}{a^2}+\dfrac{(-\frac{17}{10})^2}{b^2}=1\end{cases}$　　$\therefore a^2=b^2=\dfrac{13}{4}$

Γ为以原点O为圆心，　$OA=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$为半径的圆，　不合题意.

若A,B,D在Γ上，　则$\begin{cases}\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{(\frac{3}{2})^2}{b^2}=1\\ \dfrac{4}{a^2}=1\end{cases}$　　$\therefore\begin{cases}a=2\\ b=\sqrt{3}\end{cases}$. 合题意

$\therefore\Gamma:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$　　　离心率$e=\dfrac{1}{2}$.

(2)　$BP:y=\dfrac{1}{2}x-2$　　设$QR:x=ky+4,Q(x_1,y_1),R(x_2,y_2)$，联立$\begin{cases}x=ky+4\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$有

$(3k^2+4)y^2+24ky+36=0$. $\triangle=(24k)^2-4(3k^2+4)\cdot36>0$　　$(k>2$或$k<-2)$

由韦达$\begin{cases} y_1+y_2=\dfrac{-24k}{3k^2+4} \\ y_1y_2=\dfrac{36}{3k^2+4} \end{cases}$ 在$BP: y=\dfrac{1}{2}x-2$中令$x=x_1=ky_1+4, M(ky_1+4,\dfrac{1}{2}ky_1)$

在$BR: y=\dfrac{y_2+\frac{3}{2}}{ky_2+4-1}(x-1)-\dfrac{3}{2}$中令$x=ky_1+4$ ，$N(ky_1+4,\dfrac{(y_2+\frac{3}{2})(ky_1+3)}{ky_2+3}-\dfrac{3}{2})$

$\because M$为QN中点，$\Leftrightarrow 2\times\dfrac{1}{2}ky_1=\dfrac{(y_2+\frac{3}{5})(ky_1+3)}{ky_2+3}-\dfrac{3}{2}+y_1 \Leftrightarrow ky_1+3=\dfrac{(y_2+\frac{3}{2})(ky_1+3)}{ky_2+3}+y_1+\dfrac{3}{2}$

$\Leftrightarrow (ky_1+3)(ky_2+3)=(ky_1+3)(y_2+\dfrac{3}{2})+(ky_2+3)(y_1+\dfrac{3}{2})$

$\Leftrightarrow k^2y_1y_2+3k(y_1+y_2)+9=2ky_1y_2+(\dfrac{3}{2}k+3)(y_1+y_2)+9$

$\Leftrightarrow (k^2-2k)y_1y_2+(\dfrac{3}{2}k-3)(y_1+y_2)=0$ 将$y_1y_2=\dfrac{36}{3k^2+4}, y_1+y_2=\dfrac{-24k}{3k^2+4}$代入上式知

$(k^2-2k)y_1y_2+(\dfrac{3}{2}k-3)(y_1+y_2)=(k^2-2k)\dfrac{36}{3k^2+4}+(\dfrac{3}{2}k-3)\dfrac{-24k}{3k^2+4}$

$=\dfrac{36}{3k^2+4}(k^2-2k-k^2+2k)=0$ 故证明结束。.

19、【详解】（1）因为$\{a_n\}$是 12 项$0-1$数列，当且仅当$n=3p\left(p\in\mathbf{N}^*, p\le 4\right)$时，$a_n=0$，

所以当$n=3p-2$和$n=3p-1\left(p\in\mathbf{N}^*, p\le 4\right)$时，$a_n=1$.

设数列$\{(-1)^n a_n\}$的所有项的和为S，

则$S=(-1)a_1+(-1)^2a_2+(-1)^4a_4+(-1)^5a_5+(-1)^7a_7+(-1)^8a_8+(-1)^{10}a_{10}+(-1)^{11}a_{11}$.

$=(-1)+(-1)^2+(-1)^4+(-1)^5+(-1)^7+(-1)^8+(-1)^{10}+(-1)^{11}$

$=(-1)+1+1+(-1)+(-1)+1+1+(-1)=0$

所以数列$\{(-1)^n a_n\}$的所有项的和为 0.

（2）①若$k=3$，则X的取值有 1，2，3，其分布列为

X	1	2	3
P	$\dfrac{3}{7}$	$\dfrac{3}{7}$	$\dfrac{1}{7}$

则$E\left(X\right)=\dfrac{12}{7}$

②证明：因为数列$\{a_n\},\{b_n\}$是从集合M_k中任意取出的两个数列，

所以数列$\{a_n\},\{b_n\}$为k项$0-1$数列，

所以X的可能取值为：$1,2,3,\cdots,k$.

因为集合M_k中元素的个数共有$C_k^0+C_k^1+C_k^2+\cdots+C_k^k=2^k$个，

当 $X=m(m=1,2,\cdots,k)$ 时，则数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 中有 m 项取值不同，有 $k-m$ 项取值相同，

所以 $P(X=m)=\dfrac{\dfrac{\mathrm{C}_k^m\cdot 2^k}{\mathrm{A}_2^2}}{\mathrm{C}_{2^k}^2}=\dfrac{\mathrm{C}_k^m}{2^k-1}(m=1,2,\cdots,k)$，

所以随机变量 X 的分布列为：

X	1	2	3	……	k
P	$\dfrac{\mathrm{C}_k^1}{2^k-1}$	$\dfrac{\mathrm{C}_k^2}{2^k-1}$	$\dfrac{\mathrm{C}_k^3}{2^k-1}$	……	$\dfrac{\mathrm{C}_k^k}{2^k-1}$

因为 $m\mathrm{C}_k^m=\dfrac{m\cdot k!}{m!(k-m)!}=k\cdot\dfrac{(k-1)!}{(m-1)!\left[(k-1)-(m-1)\right]!}=k\mathrm{C}_{k-1}^{m-1}\left(m\in\mathbf{N}^*,1\le m\le k\right)$，

所以 $E(X)=1\times\dfrac{\mathrm{C}_k^1}{2^k-1}+2\times\dfrac{\mathrm{C}_k^2}{2^k-1}+\cdots+k\times\dfrac{\mathrm{C}_k^k}{2^k-1}=\dfrac{1}{2^k-1}\left(1\mathrm{C}_k^1+2\mathrm{C}_k^2+3\mathrm{C}_k^3+\cdots+k\mathrm{C}_k^k\right)$

$=\dfrac{k}{2^k-1}\left(\mathrm{C}_{k-1}^0+\mathrm{C}_{k-1}^1+\mathrm{C}_{k-1}^2+\cdots+\mathrm{C}_{k-1}^{k-1}\right)=\dfrac{k\cdot 2^{k-1}}{2^k-1}>\dfrac{k\cdot 2^{k-1}}{2^k}=\dfrac{k}{2}$，

即 $E(X)>\dfrac{k}{2}$.