树德中学高 2022 级高三上学期 11 月半期测试数学试题

命题人：张世军　审题人：叶强、杨世卿、严芬

一、高考资源网：单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的。

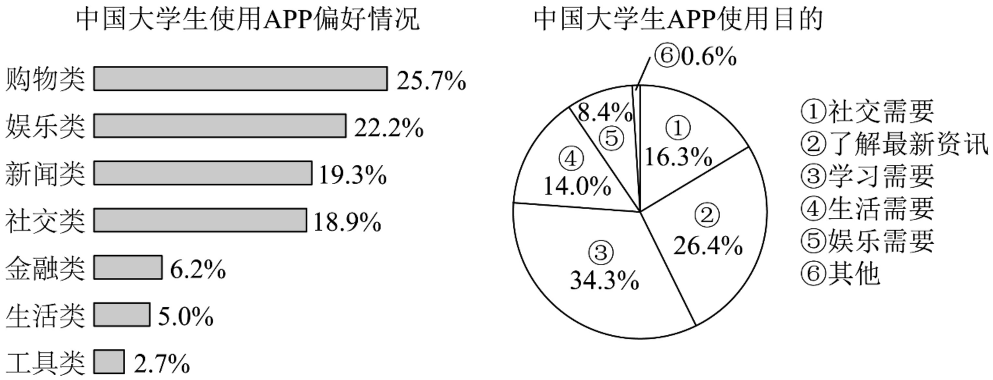
1、已知集合 $A=\{1,a+2\},B=\{a^2,1,3\}$，若对 $\forall x\in A,$ 都有 $x\in B$，则 a 为

A．1　　B．-1　　C．2　　D．1 或 2

2、直线 $2x-y+2=0$ 被圆 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ 截得的弦长为

A．$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　　B．$\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$　　C．$\sqrt{5}$　　D．$\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$

3、下图为 2024 年中国大学生使用 APP 偏好及目的统计图，根据统计图，下列关于 2024 年中国大学生使用 APP 的结论正确的是



A．超过 $\dfrac{1}{3}$ 的大学生更爱使用购物类 APP

B．超过半数的大学生使用 APP 是为了学习与生活需要

C．使用 APP 偏好情况中 7 个占比数字的极差是 23%

D．APP 使用目的中 6 个占比数字的 40% 分位数是 34.3%

4、数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，若 $a_5-a_1=15,a_4-a_2=6$，则 a_3 为

A．4　　B．-4　　C．±4　　D．不确定

5、已知实数 x,y 满足 $x>y>0$，则下列不等式恒成立的是

A．$\dfrac{xy}{2}+\dfrac{2}{xy}>2$　　B．$\dfrac{x+y}{2}>\sqrt{xy}>y$　　C．$\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\ge 4$　　D．$\dfrac{2xy}{x+y}\ge\sqrt{xy}$

6、已知四面体 $A-BCD$ 的外接球半径为 2，若 $BC=\sqrt{3},\angle BDC=\dfrac{\pi}{3}$，则四面体 $A-BCD$ 的体积最大值为

A．$\dfrac{9}{4}$　　B．$\dfrac{9}{2}$　　C．$\dfrac{9+6\sqrt{3}}{4}$　　D．$\dfrac{3+2\sqrt{3}}{4}$

7、设 F 为抛物线 $\Gamma: y^2=4x$ 的焦点，过 F 且倾斜角为 60° 的直线交曲线 Γ 于 A,B 两点（B 在第一象限，A 在第四象限），O 为坐标原点，过 A 作 Γ 的准线的垂线，垂足为 M，则 $\dfrac{|OB|}{|OM|}$ 的值为

A．$\dfrac{1}{3}$　　B．$\dfrac{1}{2}$　　C．2　　D．3

(2)由（1）知，当$a<-1$，$f\left(x\right)$在R上为单增函数，$x\to-\infty,f\left(x\right)\to-\infty$不合题意

当$a=-1$，$f\left(x\right)$在R上为单增函数，$x\to-\infty,f\left(x\right)\to0$，故$b\le0,b-a$的最大值为 1

当当$a>-1$，$f\left(x\right)$在$\left(-\infty,\ln\left(a+1\right)\right)$单减，$\left(\ln\left(a+1\right),+\infty\right)$单增

所以$f\left(x\right)$**在**$x=\ln\left(a+1\right)$**处取得极小值，**

也是最小值为$f\left(\ln\left(a+1\right)\right)=\mathrm{e}^{\ln\left(a+1\right)}-\left(a+1\right)\ln\left(a+1\right)-b=\left(a+1\right)-\left(a+1\right)\ln\left(a+1\right)-b$**，**

由不等式$\mathrm{e}^{x}-\left(a+1\right)x\ge b$**，可得**$\left(a+1\right)-\left(a+1\right)\ln\left(a+1\right)-b\ge0$**，**

所以$b-a\le1-\left(a+1\right)\ln\left(a+1\right)$**，**

令$F\left(x\right)=1-x\ln x\left(x>0\right)$**，则**$F'\left(x\right)=-\ln x-1$**，**

当$0<x<\frac{1}{\mathrm{e}}$**时，**$F'\left(x\right)>0$**；当**$x>\frac{1}{\mathrm{e}}$**时，**$F'\left(x\right)<0$**，**

所以$F\left(x\right)$**在**$\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$**上单调递增，在**$\left(\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$**上单调递减，**

即$F\left(x\right)_{\max}=F\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=1+\frac{1}{\mathrm{e}}$**，即**$b-a\le1+\frac{1}{\mathrm{e}}$**，所以**$b-a$**的最大值为**$1+\frac{1}{\mathrm{e}}$**.**

故答案为：$1+\frac{1}{\mathrm{e}}$**.**

18、解答：(1)由于A,B关于x轴对称， 故A,B同时在Γ上. $\Gamma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a\ne b)$

若A,B,C在Γ上， 则$\begin{cases}\frac{1}{a^2}+\frac{(\frac{3}{2})^2}{b^2}=1\\ \frac{(-\frac{3}{5})^2}{a^2}+\frac{(-\frac{17}{10})^2}{b^2}=1\end{cases}$ $\therefore a^2=b^2=\frac{13}{4}$

Γ为以原点O为圆心， $OA=\frac{\sqrt{13}}{2}$为半径的圆， 不合题意.

若A,B,D在Γ上， 则$\begin{cases}\frac{1}{a^2}+\frac{(\frac{3}{2})^2}{b^2}=1\\ \frac{4}{a^2}=1\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}a=2\\ b=\sqrt{3}\end{cases}$. 合题意

$\therefore\Gamma:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 离心率$e=\frac{1}{2}$.

(2) $BP:y=\frac{1}{2}x-2$ 设$QR:x=ky+4,Q(x_1,y_1),R(x_2,y_2)$，联立$\begin{cases}x=ky+4\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$有

$(3k^2+4)y^2+24ky+36=0$. $\vartriangle=(24k)^2-4(3k^2+4)\cdot36>0$ $(k>2$或$k<-2)$

由韦达$\begin{cases} y_1+y_2=\dfrac{-24k}{3k^2+4} \\ y_1y_2=\dfrac{36}{3k^2+4} \end{cases}$ 在 $BP: y=\dfrac{1}{2}x-2$ 中令 $x=x_1=ky_1+4, M(ky_1+4,\dfrac{1}{2}ky_1)$

在 $BR: y=\dfrac{y_2+\frac{3}{2}}{ky_2+4-1}(x-1)-\dfrac{3}{2}$ 中令 $x=ky_1+4$ ，$N(ky_1+4,\dfrac{(y_2+\frac{3}{2})(ky_1+3)}{ky_2+3}-\dfrac{3}{2})$

$\because M$ 为 QN 中点，$\Leftrightarrow 2\times\dfrac{1}{2}ky_1=\dfrac{(y_2+\frac{3}{5})(ky_1+3)}{ky_2+3}-\dfrac{3}{2}+y_1 \Leftrightarrow ky_1+3=\dfrac{(y_2+\frac{3}{2})(ky_1+3)}{ky_2+3}+y_1+\dfrac{3}{2}$

$\Leftrightarrow (ky_1+3)(ky_2+3)=(ky_1+3)(y_2+\dfrac{3}{2})+(ky_2+3)(y_1+\dfrac{3}{2})$

$\Leftrightarrow k^2y_1y_2+3k(y_1+y_2)+9=2ky_1y_2+(\dfrac{3}{2}k+3)(y_1+y_2)+9$

$\Leftrightarrow (k^2-2k)y_1y_2+(\dfrac{3}{2}k-3)(y_1+y_2)=0$ 将 $y_1y_2=\dfrac{36}{3k^2+4}, y_1+y_2=\dfrac{-24k}{3k^2+4}$ 代入上式知

$(k^2-2k)y_1y_2+(\dfrac{3}{2}k-3)(y_1+y_2)=(k^2-2k)\dfrac{36}{3k^2+4}+(\dfrac{3}{2}k-3)\dfrac{-24k}{3k^2+4}$

$=\dfrac{36}{3k^2+4}(k^2-2k-k^2+2k)=0$ 故证明结束。.

19、【详解】（1）因为$\{a_n\}$是 12 项$0-1$数列，当且仅当$n=3p\left(p\in\mathbf{N}^*, p\le 4\right)$时，$a_n=0$，

所以当$n=3p-2$和$n=3p-1\left(p\in\mathbf{N}^*, p\le 4\right)$时，$a_n=1$.

设数列$\{(-1)^n a_n\}$的所有项的和为S，

则$S=(-1)a_1+(-1)^2a_2+(-1)^4a_4+(-1)^5a_5+(-1)^7a_7+(-1)^8a_8+(-1)^{10}a_{10}+(-1)^{11}a_{11}$.

$=(-1)+(-1)^2+(-1)^4+(-1)^5+(-1)^7+(-1)^8+(-1)^{10}+(-1)^{11}$

$=(-1)+1+1+(-1)+(-1)+1+1+(-1)=0$

所以数列$\{(-1)^n a_n\}$的所有项的和为 0.

（2）①若$k=3$，则 X 的取值有 1，2，3，其分布列为

X	1	2	3
P	$\dfrac{3}{7}$	$\dfrac{3}{7}$	$\dfrac{1}{7}$

则$E\left(X\right)=\dfrac{12}{7}$

②证明：因为数列$\{a_n\},\{b_n\}$是从集合M_k中任意取出的两个数列，

所以数列$\{a_n\},\{b_n\}$为k项$0-1$数列，

所以 X 的可能取值为：$1,2,3,\cdots,k$.

因为集合M_k中元素的个数共有$C_k^0+C_k^1+C_k^2+\cdots+C_k^k=2^k$个，

当 $X=m\left(m=1,2,\cdots,k\right)$ 时，则数列 $\left\{a_n\right\},\left\{b_n\right\}$ 中有 m 项取值不同，有 $k-m$ 项取值相同，

所以 $P\left(X=m\right)=\dfrac{\dfrac{\mathrm{C}_k^m\cdot 2^k}{\mathrm{A}_2^2}}{\mathrm{C}_{2^k}^2}=\dfrac{\mathrm{C}_k^m}{2^k-1}\left(m=1,2,\cdots,k\right)$，

所以随机变量 X 的分布列为：

X	1	2	3	……	k
P	$\dfrac{\mathrm{C}_k^1}{2^k-1}$	$\dfrac{\mathrm{C}_k^2}{2^k-1}$	$\dfrac{\mathrm{C}_k^3}{2^k-1}$	……	$\dfrac{\mathrm{C}_k^k}{2^k-1}$

因为 $m\mathrm{C}_k^m=\dfrac{m\cdot k!}{m!\left(k-m\right)!}=k\cdot\dfrac{\left(k-1\right)!}{\left(m-1\right)!\left[\left(k-1\right)-\left(m-1\right)\right]!}=k\mathrm{C}_{k-1}^{m-1}\left(m\in\mathbf{N}^*,1\le m\le k\right)$，

所以 $E\left(X\right)=1\times\dfrac{\mathrm{C}_k^1}{2^k-1}+2\times\dfrac{\mathrm{C}_k^2}{2^k-1}+\cdots+k\times\dfrac{\mathrm{C}_k^k}{2^k-1}=\dfrac{1}{2^k-1}\left(1\mathrm{C}_k^1+2\mathrm{C}_k^2+3\mathrm{C}_k^3+\cdots+k\mathrm{C}_k^k\right)$

$=\dfrac{k}{2^k-1}\left(\mathrm{C}_{k-1}^0+\mathrm{C}_{k-1}^1+\mathrm{C}_{k-1}^2+\cdots+\mathrm{C}_{k-1}^{k-1}\right)=\dfrac{k\cdot 2^{k-1}}{2^k-1}>\dfrac{k\cdot 2^{k-1}}{2^k}=\dfrac{k}{2}$，

即 $E\left(X\right)>\dfrac{k}{2}$.