2024~2025 学年度上期高 2025届半期考试
高三数学试卷参考答案

一、单选题

DABC　DBCC

二、多选题

9.ABD　10.AC　11. BCD

三、填空题

12. $\exists x_0 \in N, {x_0}^2 \le 1$

13. $(x-3)^2+(y-2)^2=25$

14. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

四、解答题

15.【解】(I) $\because \sqrt{3}\sin C\cos C-\cos^2 C=\dfrac{1}{2}$，$\therefore \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2C-\dfrac{1}{2}\cos 2C=1$，即 $\sin(2C-\dfrac{\pi}{6})=1$，

$\because 0<C<\pi$，$\therefore 2C-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$，解得 $C=\dfrac{\pi}{3}$。 ……（6 分）

(II) $\because m$与n 共线，$\therefore \sin B-2\sin A=0$。由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，得 $b=2a$ ①，

$\because c=3$，由余弦定理，得 $9=a^2+b^2-2ab\cos\dfrac{\pi}{3}$ ②，联立①②，$\begin{cases} a=\sqrt{3} \\ b=2\sqrt{3} \end{cases}$ ……（13 分）

16.【解】(I)由频率估计概率可得

甲获得优秀的概率为 0.4，乙获得优秀的概率为 0.5，丙获得优秀的概率为 0.5，

故答案为 0.4 ……（5 分）

(II)设甲获得优秀为事件 A_1,乙获得优秀为事件 A_2，丙获得优秀为事件 A_3

$$P(X=0)=P(\overline{A_1A_2A_3})=0.6\times0.5\times0.5=\frac{3}{20},$$

$$P(X=1)=P(A_1\overline{A_2A_3})+P(\overline{A_1}A_2\overline{A_3})+P(\overline{A_1A_2}A_3)$$

$$=0.4\times0.5\times0.5+0.6\times0.5\times0.5+0.6\times0.5\times0.5=\frac{8}{20},$$

$$P(X=2)=P(A_1A_2\overline{A_3})+P(A_1\overline{A_2}A_3)+P(\overline{A_1}A_2A_3)$$

$$=0.4\times0.5\times0.5+0.4\times0.5\times0.5+0.6\times0.5\times0.5=\frac{7}{20},$$

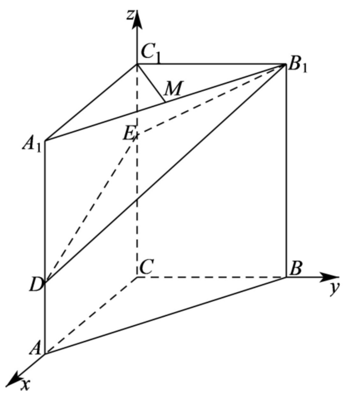
$$P(X=3)=P(A_1A_2A_3)=0.4\times0.5\times0.5=\frac{2}{20},$$ ……(11分)

$\therefore X$ 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{3}{20}$	$\dfrac{8}{20}$	$\dfrac{7}{20}$	$\dfrac{2}{20}$

$\therefore\ E(X)=0\times\frac{3}{20}+1\times\frac{8}{20}+2\times\frac{7}{20}+3\times\frac{2}{20}=\frac{7}{5}$ ……(15分)

17.【解】依题意，以C为原点，分别以$\overrightarrow{CA}$、$\overrightarrow{CB}$、$\overrightarrow{CC_1}$的方向为x轴、y轴、z轴的正方向建立空间直角坐标系（如图），



可得$C(0,0,0)$、$A(2,0,0)$、$B(0,2,0)$、$C_1(0,0,3)$、$A_1(2,0,3)$、$B_1(0,2,3)$、$D(2,0,1)$、$E(0,0,2)$、$M(1,1,3)$.

（I）依题意，$\overrightarrow{C_1M}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{B_1D}=(2,-2,-2)$，

从而$\overrightarrow{C_1M}\cdot\overrightarrow{B_1D}=2-2+0=0$，所以$C_1M\perp B_1D$；……（4分）

（II）依题意，$\overrightarrow{CA}=(2,0,0)$是平面$BB_1E$的一个法向量，

$\overrightarrow{EB_1}=(0,2,1)$，$\overrightarrow{ED}=(2,0,-1)$.

设$\vec{n}=(x,y,z)$为平面DB_1E的法向量，

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{EB_1}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{ED}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}2y+z=0\\ 2x-z=0\end{cases}$，

不妨设$x=1$，可得$\vec{n}=(1,-1,2)$.

$\cos<\overrightarrow{CA},\vec{n}>=\frac{\overrightarrow{CA}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{CA}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{2}{2\times\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$，

$\therefore\ \sin<\overrightarrow{CA},\vec{n}>=\sqrt{1-\cos^2<\overrightarrow{CA},\vec{n}>}=\frac{\sqrt{30}}{6}$.

所以，二面角$B-B_1E-D$的正弦值为$\frac{\sqrt{30}}{6}$； ……（10分）

（III）依题意，$\overrightarrow{AB}=(-2,2,0)$.

由（II）知$\vec{n}=(1,-1,2)$为平面DB_1E的一个法向量，于是

$\cos<\overrightarrow{AB},\vec{n}>=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{-4}{2\sqrt{2}\times\sqrt{6}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

所以，直线AB与平面DB_1E所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$. ……（15分）

18.【解】:（I）设$|OF|=c$，由$\cos\angle AFB=\frac{\sqrt{2}}{2}$，得$b=c$，

再由ΔFAB面积$(a+c)b=4(\sqrt{2}+1)$，解得椭圆方程$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ ……（4分）

（II）①解：设$P(x_0,y_0)$，解得$A(2\sqrt{2},0),B(0,2)$，

直线PA：$y=\frac{y_0}{x_0-2\sqrt{2}}(x-2\sqrt{2})$；直线$PB$：$y=\frac{y_0-2}{x_0}x+2$；

解得$M(0,\dfrac{-2\sqrt{2}y_0}{x_0-2\sqrt{2}})$，$N(\dfrac{-2x_0}{y_0-2},0)$

四边形 $ABNM$ 的面积$S=\dfrac{1}{2}\left|AN\right|\cdot\left|BM\right|=\dfrac{1}{2}(2\sqrt{2}+\dfrac{2x_0}{y_0-2})(2+\dfrac{2\sqrt{2}y_0}{x_0-2\sqrt{2}})$

$=2(\dfrac{\sqrt{2}y_0+x_0-2\sqrt{2}}{y_0-2})(\dfrac{\sqrt{2}y_0+x_0-2\sqrt{2}}{x_0-2\sqrt{2}})=2\dfrac{(\sqrt{2}y_0+x_0-2\sqrt{2})^2}{(y_0-2)(x_0-2\sqrt{2})}$

$=2\times\dfrac{2{y_0}^2+{x_0}^2+8-4\sqrt{2}x_0-8y_0+2\sqrt{2}x_0y_0}{(y_0-2)(x_0-2\sqrt{2})}$

由点P在椭圆上，$\therefore {x_0}^2+2{y_0}^2=8$

$=2\times\dfrac{16-4\sqrt{2}x_0-8y_0+2\sqrt{2}x_0y_0}{(y_0-2)(x_0-2\sqrt{2})}=\dfrac{4\sqrt{2}(4\sqrt{2}-2x_0-2\sqrt{2}y_0+x_0y_0)}{(y_0-2)(x_0-2\sqrt{2})}$

$=\dfrac{4\sqrt{2}(y_0-2)(x_0-2\sqrt{2})}{(y_0-2)(x_0-2\sqrt{2})}=4\sqrt{2}$ ……（11 分）

②解：$\because S_{\Delta PMN}=S_{\Delta PAB}-S_{四边形ABNM}=S_{\Delta PAB}-4\sqrt{2}$

即需求出 $S_{\Delta PAB}$ 最大值即可

AB：$x+\sqrt{2}y-2\sqrt{2}=0$，椭圆三象限的点 P 到 AB 的距离$d=\dfrac{\left|x_0+\sqrt{2}y_0-2\sqrt{2}\right|}{\sqrt{3}}$

$\therefore S_{\Delta PAB}=\dfrac{1}{2}\left|AB\right|\cdot d=\left|x_0+\sqrt{2}y_0-2\sqrt{2}\right|=\left|x_0+\sqrt{2}y_0\right|+2\sqrt{2}$

$\because {x_0}^2+2{y_0}^2=8$

$\therefore (x_0+\sqrt{2}y_0)^2=8+2x_0\cdot\sqrt{2}y_0\le 8+\dfrac{(x_0+\sqrt{2}y_0)^2}{2}$ $\qquad\therefore (x_0+\sqrt{2}y_0)^2\le 16$

$\therefore \left|x_0+\sqrt{2}y_0-2\sqrt{2}\right|\le 4+2\sqrt{2}$ 此时 $x_0=\sqrt{2}y_0$，$P(-2,-\sqrt{2})$

$S_{\Delta PAB}$ 最大值为$4+2\sqrt{2}$ $\qquad\Delta PMN$ 面积最大值为$4-2\sqrt{2}$ ……（17 分）

注：此问也可用参数方程求解，酌情给分

19.【解】（I）当$a=0$时，$f(x)=e^x-x-1$ $\quad\therefore f'(x)=e^x-1$

当$x>0$时，$e^x>1$，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增

当$x<0$时，$e^x<1$，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减

$\therefore f(x)\ge f(0)=0$ 得证 ……（3 分）

（II）法一：由$f(x)=e^x-ax^2-x-1$，$\therefore f'(x)=e^x-2ax-1$，$\therefore f''(x)=e^x-2a$

①当$a\le\dfrac{1}{2}$时，$x>0$，$e^x>1$，$f''(x)>0$，$\therefore f'(x)$单调递增，$f'(x)>f'(0)=0$，

$\therefore f(x)$单调递增，$f(x)>f(0)=0$，$\therefore a\le\dfrac{1}{2}$成立；

②当$a>\dfrac{1}{2}$时，当$x\in(0,\ln 2a)$，$f''(x)<0$，$\therefore f'(x)$单调递减，$f'(x)<f'(0)=0$，

$\therefore f(x)$单调递减，$f(x)<f(0)=0$，与条件矛盾，$\therefore a>\dfrac{1}{2}$不成立；

综上所述：$a \le \frac{1}{2}$ ……（8 分）

法二：由 $f(x) > 0$，即 $a < \frac{e^x - x - 1}{x^2}$ 成立，设 $u(x) = \frac{e^x - x - 1}{x^2}$

$u'(x) = \frac{(x-2)e^x + x + 2}{x^3}$，设 $k(x) = (x-2)e^x + x + 2$，$k'(x) = (x-1)e^x + 1$

$k''(x) = xe^x > 0$，$\therefore k'(x)$ 单调递增，$k'(x) > k'(0) = 0$，$\therefore k(x)$ 单调递增

$k(x) > k(0) = 0$ 即 $u'(x) > 0$，$\therefore u(x)$ 单调递增，$u(x) > u(0)$

由洛必达法则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - x - 1}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{2x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$，$\therefore a \le \frac{1}{2}$ ……（8 分）

（III）$g(x) = \frac{e^x - 1}{x} - 2\ln x$，则 $g'(x) = \frac{xe^x - e^x - 2x + 1}{x^2}$

设 $h(x) = xe^x - e^x - 2x + 1$，则 $h'(x) = xe^x - 2$，又因 $h''(x) = (x+1)e^x > 0$

$\therefore h'(x) = xe^x - 2$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增

又 $\because h'(0)\cdot h'(1) = (-2)\times(e-2) < 0$

$\therefore \exists x_0 \in (0,1),$ 使得 $h'(x_0) = 0$，即 $e^{x_0} = \frac{2}{x_0}$ ①

且 $x \in (0, x_0)$，$h'(x) < 0$，$h(x)$ 单调递减；$x \in (x_0, 1)$，$h'(x) > 0$，$h(x)$ 单调递增

$\therefore h(x)_{\min} = h(x_0) = x_0 e^{x_0} - e^{x_0} - 2x_0 + 1$，由①得 $h(x_0) = 3 - \frac{2}{x_0} - 2x_0 < h(0) = 0$

又 $\because h(1) = -1 < 0, h(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}} - 2 > 0$，

$\therefore \exists x_1 \in (1, \frac{3}{2}),$ 使得 $h(x_1) = 0$，即 $x_1 e^{x_1} - e^{x_1} - 2x_1 + 1 = 0$，即 $e^{x_1} = \frac{2x_1 - 1}{x_1 - 1}$

且 $x \in (0, x_1)$，$h(x) < 0$，$g(x)$ 单调递减；$x \in (x_1, +\infty)$，$h(x) > 0$，$g(x)$ 单调递增

$\therefore g(x)_{\min} = g(x_1) = \frac{e^{x_1} - 1}{x_1} - 2\ln x_1 = \frac{1}{x_1 - 1} - 2\ln x_1$，

$\because x_1 \in (1, \frac{3}{2})$，$\therefore g(x_1) < g(1) = e - 1$ ……（13 分）

再设 $\varphi(x) = \frac{1}{x-1} - 2\ln x$，易证 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减

$\because x_1 \in (1, \frac{3}{2})$，$\therefore \varphi(x_1)$ 也即 $g(x_1)$ 大于 $\varphi(\frac{3}{2}) = 2 - 2\ln\frac{3}{2}$

要证 $2 - 2\ln\frac{3}{2} > \frac{23}{20}$，即证 $\ln\frac{3}{2} < \frac{17}{40}$，又即证 $e^{\frac{17}{40}} > \frac{3}{2}$

由（II）问 $e^x > 1 + x + \frac{1}{2}x^2$，

$\therefore e^{\frac{17}{40}} > 1 + \frac{17}{40} + \frac{1}{2}\times(\frac{17}{40})^2 = \frac{4849}{3200} > \frac{4800}{3200} = \frac{3}{2}$ 得证 ……（17 分）