绵阳市高2022级第一次诊断考试
数学参考答案和评分标准

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.

1．B　2．A　3．D　4．D　5．C　6．B　7．C　8．A

二、选择题：本大题共3小题，每小题6分，共18分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得6分，选对但不全的得部分分，有选错的得0分.

9．AB　10．ABD　11．BCD

三、填空题：本题共3个小题，每小题5分，共15分.

12．$\sqrt{5}$；　13．-8；　14．$(-\infty, -e^2)$

四、解答题：本题共5小题，第15题13分，第16、17小题15分，第18、19小题17分，共77分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15．**解**：（1）

	有报考意向	无报考意向	合计
男学生	100	400	500
女学生	100	300	400
合计	200	700	900

……………………………………………………………………… 2分

男学生有报考意向的概率 $P_1=\dfrac{100}{500}=\dfrac{1}{5}$， ………………………… 4分

女学生有报考意向的概率 $P_2=\dfrac{100}{400}=\dfrac{1}{4}$； ………………………… 6分

（2）零假设为H_0：有报考军事类院校意向与性别独立，

$$\therefore \chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$$=\frac{900(100\times300-100\times400)^2}{500\times400\times200\times700}=\frac{45}{14}\approx3.21>2.706，$$ ………………… 9分

根据小概率值$\alpha=0.1$的独立性检验，我们推断H_0不成立，即认为报考军事类院校与性别有关联，此推断犯错误的概率不大于0.1，故能认为报考军事类院校意愿与性别有关. ………………………………………………………………… 13 分

16．解：（1）$\because a\cos C+c\cos A=1$，由余弦定理可得：

$a\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+c\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=1$， ……………………………2 分

$\therefore \dfrac{2b^2}{2b}=1$，则$b=1$， ……………………………………………………… 3 分

又$a\sin C=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{4}$； …………………………………………………… 6 分

（2）$\because b=1$，$B=\dfrac{\pi}{4}$，

在$\triangle ABC$中，由正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{2}$， …………………… 8 分

$\therefore a=\sqrt{2}\sin A$，又$\because a\sin C=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore \sqrt{2}\sin A\sin C=\dfrac{1}{2}$，则$\sin A\sin(A+\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$， ………………………… 10 分

$\therefore 2\sin^2 A+2\sin A\cos A=1$，则$\sin 2A=\cos 2A$， ………………………… 12 分

$\therefore \tan 2A=1$，又$\because A$是三角形内角，

$\therefore 2A=\dfrac{\pi}{4}$或$\dfrac{5\pi}{4}$， ………………………………………………………… 14 分

$\therefore A=\dfrac{\pi}{8}$或$\dfrac{5\pi}{8}$. ………………………………………………………… 15 分

17．解：（1）由已知可得，$2a_1=b_1$，$3a_2=2b_2$，$a_2{}^2=b_1b_2$，则$a_2=3a_1$， … 2 分

$\therefore a_1=\dfrac{b_1}{2}$，$a_2=\dfrac{3b_1}{2}$，

$\therefore a_1+a_2=2b_1$， ………………………………………………………………… 3 分

又$\because a_1+a_2=4$，

$\therefore b_1=2$； ………………………………………………………………………… 4 分

（2）（i）由题意得 $\begin{cases}(n+1)a_n=nb_n\\(n+2)a_{n+1}=(n+1)b_{n+1}\\a_{n+1}^2=b_n\cdot b_{n+1}\end{cases}$，得 $a_{n+1}^2=(\dfrac{n+1}{n}a_n)\times(\dfrac{n+2}{n+1}a_{n+1})$，

……………………………………………………………………………………6 分

$\therefore \dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{n+2}{n}$， ………………………………………………………………… 7 分

$\therefore \dfrac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\dfrac{a_{n-2}}{a_{n-3}}\cdots\dfrac{a_3}{a_2}\cdot\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{n+1}{n-1}\cdot\dfrac{n}{n-2}\cdot\dfrac{n-1}{n-3}\cdots\dfrac{5}{3}\dfrac{4}{2}\dfrac{3}{1}(n\geqslant 2)$， ………… 8 分

$\therefore \dfrac{a_n}{a_1}=\dfrac{n(n+1)}{2}$，则 $a_n=n(n+1)\,(n\in\mathbf{N}^*)$，

$\therefore b_n=\dfrac{n+1}{n}a_n=\dfrac{n+1}{n}\cdot n(n+1)=(n+1)^2$， ………………………………… 10 分

（ii）由（i）可得：$b_n-a_n=(n+1)^2-n(n+1)=n+1$， …………………… 11 分

因此，$\{b_n-a_n\}$ 是以 2 为首项，1 为公差的等差数列， …………………… 12 分

$\therefore T_n-S_n=(b_1+b_2+\cdots b_n)-(a_1+a_2+\cdots a_n)$

$=(b_1-a_1)+(b_2-a_2)+\cdots(b_n-a_n)$

$=\dfrac{n(2+n+1)}{2}$

$=\dfrac{n(n+3)}{2}$． ……………………………………………………………… 15 分

18．**解**：（1）$f(x)=x^3-5x^2-25x-1$， ……………………………………………… 1 分

设切点为 $(x_0, x_0{}^3-5x_0{}^2-25x_0-1)$，

则切线斜率 $k=f'(x_0)=3x_0{}^2-10x_0-25$， …………………………………… 3 分

切线方程为：$y-(x_0{}^3-5x_0{}^2-25x_0-1)=(3x_0{}^2-10x_0-25)(x-x_0)$，

∵切线过(0，2)．将(0，2)代入上式整理得：$2x_0{}^3-5x_0{}^2+3=0$， ………… 5 分

即：$(x_0-1)(2x_0{}^2-3x_0-3)=0$ 该方程有三个实数解，故切线有三条，

其中一解 $x_0=1$．故一切线方程为：$y=-32x+2$； ………………………… 7 分

（2） $f'(x)=3x^2+2ax-a^2=(3x-a)(x+a)$，

（i）当 $a=0$ 时，$f'(x)=3x^2\geqslant 0$ 成立，$f(x)$ 在 **R** 上单调递增；……………… 8 分

（ii）当 $a>0$ 时，由 $f'(x)>0$，得 $x<-a$ 或 $x>\frac{a}{3}$，…………………………9 分

由 $f'(x)<0$，得 $-a<x<\frac{a}{3}$，…………………………………………… 10 分

$\therefore f(x)$ 在 $(-a,\frac{a}{3})$ 上单调递减，在 $(-\infty,-a)$ 和 $(\frac{a}{3},+\infty)$ 上单调递增；……11 分

（iii）当 $a<0$ 时，$f(x)$ 在 $(\frac{a}{3},-a)$ 上单调递减；在 $(-\infty,\frac{a}{3})$ 和 $(-a,+\infty)$ 上单调递增．……………………………………………………………… 13 分

（3）由（2）可知，

当 $a=0$ 时，$f(x)$ 在 **R** 上单调递增，有唯一零点；……………………… 14 分

当 $a\neq 0$ 时，由唯一零点得 $f(-a)\cdot f(\frac{a}{3})>0$，即 $-\frac{3}{\sqrt[3]{5}}<a<1$ 且 $a\neq 0$，…… 16 分

综上所述：$f(x)$ 有唯一零点，即 $-\frac{3}{\sqrt[3]{5}}<a<1$．……………………… 17 分

19．解：（1） $f'(x)=\frac{1}{x}+2x-3=\frac{2x^2-3x+1}{x}=\frac{(2x-1)(x-1)}{x}$，…………………1 分

$x\in(0,\frac{1}{2})$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

$x\in(\frac{1}{2},1)$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，………………………………3 分

$\therefore f(x)_{\max}=f(\frac{1}{2})=\ln\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+a=\frac{3}{4}-\ln 2$，

$\therefore a=2$；……………………………………………………………4 分

（2）（i） $f(a_n)=\ln a_n+a_n^2-3a_n+2$，

可得 $2a_n\cdot a_{n+1}=\ln a_n+a_n^2+1$，

$\therefore 2a_{n+1}=\frac{\ln a_n}{a_n}+a_n+\frac{1}{a_n}$，…………………………………6 分

设 $h(x)=\dfrac{\ln x}{x}+x+\dfrac{1}{x}(x>1)$，则 $h'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}+1-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^2-\ln x}{x^2}$，

令 $\varphi(x)=x^2-\ln x$，$\varphi'(x)=2x-\dfrac{1}{x}>0$，……………………………………8 分

∴ $h'(x)$ 为增函数，且 $h'(1)=1>0$，∴ $h(x)$ 为增函数，

又 $h(1)=2$，则 $h(x)>2$，即当 $a_n>1$ 时，$a_{n+1}>1$，

∵ $a_1>1$，则 $a_2>1$，

∴ $a_3>1$，$a_4>1$，……，$a_n>1$，

∴ $a_n>1$；……………………………………………………………………11 分

（ii）可证明得出 $\ln x\leqslant x-1$（当 x=1 时，“=”成立），……………………12 分

∴ $\ln a_n<a_n-1$，由 $2a_na_{n+1}=\ln a_n+a_n^2+1$ 得：

$2a_na_{n+1}<a_n-1+a_n^2+1$，即 $2a_na_{n+1}<a_n(a_n+1)$，…………………………13 分

即 $a_{n+1}<\dfrac{1}{2}(a_n+1)$，且 $a_1-1=\dfrac{1}{3}$，

∴ $a_{n+1}-1<\dfrac{1}{2}(a_n-1)<(\dfrac{1}{2})^2(a_{n-1}-1)<\cdots<(\dfrac{1}{2})^n(a_1-1)=\dfrac{1}{3}\cdot(\dfrac{1}{2})^n$，

∴ $a_n-1<\dfrac{1}{3}\cdot(\dfrac{1}{2})^{n-1}$（$n\geqslant 2$），……………………………………………14 分

∴ $\sum\limits_{i=1}^{n}|1-a_i|=\sum\limits_{i=1}^{n}(a_n-1)<\dfrac{1}{3}\sum\limits_{i=1}^{n}(\dfrac{1}{2})^{i-1}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1[1-(\frac{1}{2})^n]}{1-\frac{1}{2}}=\dfrac{2}{3}(1-\dfrac{1}{2^n})<\dfrac{2}{3}$，…… 15 分

即 $3\sum\limits_{i=1}^{n}|a_i-1|<2$．………………………………………………………………17 分