树德中学高2022级高三开学数学考试试题

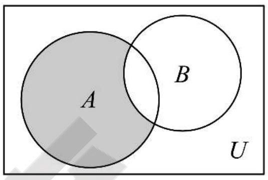
一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的.

1.“$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2+2x+1>0$”的否定是（　　）

A. $\exists x_0\in\mathbf{R}$，使得 $x_0^2+2x_0+1\leqslant 0$　　B. $\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2+2x+1<0$

C. $\exists x_0\in\mathbf{R}$，使得 $x_0^2+2x_0+1<0$　　D. $\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2+2x+1\leqslant 0$

2.已知全集 $U=\{1,2,3,4,5,6,7\}$，集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{3,4,5,6\}$，则图中阴影部分表示的集合的子集个数为（　　）



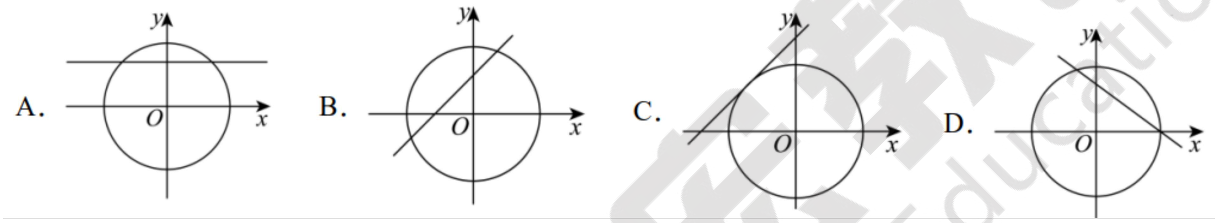
A. 2　　B. 4

C. 8　　D. 16

3.已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，前 n 项和为 S_n，则“$d\geqslant 0$”是“$\{S_n\}$ 是递增数列”的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件　　C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4.在同一平面直角坐标系中，直线 $mx-y+1=0(m\in\mathbf{R})$ 与圆 $x^2+y^2=2$ 的位置不可能为（　　）



5.一堆苹果中大果与小果的比例为9:1，现用一台水果分选机进行筛选．已知这台分选机把大果筛选为小果的概率为5%，把小果筛选为大果的概率为2%．经过一轮筛选后，现在从这台分选机筛选出来的“大果”里面随机抽取一个，则这个“大果”是真的大果的概率为（　　）

A. $\frac{855}{857}$　　B. $\frac{857}{1000}$　　C. $\frac{171}{200}$　　D. $\frac{9}{10}$

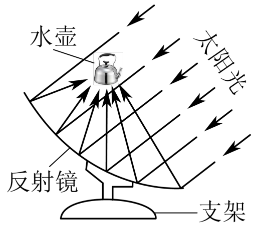
6.某省高考改革试点方案规定：2023年高考总成绩由语文、数学、外语三门统考科目和思想政治、历史、地理、物理、化学、生物六门选考科目组成，将每门选考科目的考生原始成绩从高到低划分为 A，$B+$，B，$C+$，C，$D+$，D，E 共8个等级，参照正态分布原则，确定各等级人数所占比例分别为3%，7%，16%，24%，24%，16%，7%，3%，选考科目成绩计入考生总成绩时，将 A 至 E 等级内的考生原始成绩，依照等比例转换法则，分别转换到[91,100]，[81,90]，[71,80]，[61,70]，[51,60]，[41,50]，[31,40]，[21,30]八个分数区间，得到考生的等级成绩，如果该省某次高考模拟考试物理科目的原始成绩 $X\sim N(50,256)$，那么 $B+$ 等级的原始分最低大约为（　　）

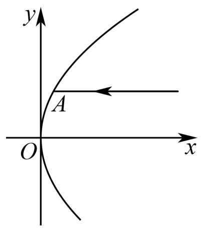
参考数据：对任何一个正态分布 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 来说，通过 $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$ 转化为标准正态分布 $Z\sim N(0,1)$，从而查标准正态分布表得到 $P(X\leqslant X_1)=P(Z\leqslant Z_0)$．可供查阅的（部分）标准正态分布表：

Z_0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
$P(Z\leqslant Z_0)$	0.8643	0.8849	0.9032	0.9192	0.9332	0.9452	0.9554	0.9641	0.9713
Z_0	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8
$P(Z\leqslant Z_0)$	0.9772	0.9821	0.9861	0.9893	0.9918	0.9938	0.9953	0.9965	0.9974

A. 57　　B. 64　　C. 71　　D. 77

7.抛物线绕它的对称轴旋转所得到的曲面叫抛物面，用于加热水和水壶食物的太阳灶应用了抛物线的光学性质：一束平行于抛物线对称轴的光线，经过抛物面的反射后，集中于它的焦点．已知一束平行于反射镜对称轴的入射光线与抛物线 $y^2=2px$ 的交点为 $A(4,4)$，则反射光线所在直线被抛物线截得的弦长为（　　）





A. $\frac{27}{4}$　　B. $\frac{21}{4}$

C. $\frac{25}{4}$　　D. $\frac{29}{4}$

8.若对任意的 $x_1,x_2\in[-1,0)$，$x_1<x_2$，$\frac{x_2e^{x_1}-x_1e^{x_2}}{x_1-x_2}<a$ 恒成立，则 a 的最小值为（　　）

A. $-\frac{1}{e^2}$　　B. $-\frac{1}{e}$　　C. $-\frac{2}{e^2}$　　D. $-\frac{2}{e}$

二、多项选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9.某科技企业为了对一种新研制的专利产品进行合理定价，将该产品按事先拟定的价格进行试销，得到如下数据：

单价 x(元)	40	50	60	70	80	90
销量 y(件)	50	44	43	m	35	28

由表中数据，求得线性回归方程为 $\hat{y}=-0.4x+66$，则下列说法正确的是（　　）

A. 产品的销量与单价成负相关

B. 为了获得最大的销售额（销售额＝单价×销量），单价应定为 70 元或 80 元

C. $m=40$

D. 若在这些样本点中任取一点，则它在线性回归直线左下方的概率为 $\frac{1}{3}$

10.已知 $a,b,c\in\mathbf{R}$，则下列结论正确的是（　　）

A. 若 $a>b>0$，则 $\frac{b}{a}<\frac{b+c}{a+c}$　　B. 若 $ac^2>bc^2$，则 $a>b$

C. 若 $a>b>0$，$\frac{a+b}{a+2\sqrt{2ab}}\geqslant\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2a^2+3}{\sqrt{a^2+1}}$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$

11.伯努利双纽线最早于 1694 年被瑞士数学家雅各布·伯努利用来描述他所发现的曲线.在平面直角坐标系 xOy 中，把到定点 $F_1(-a,0)$，$F_2(a,0)$ 距离之积等于 $a^2(a>0)$ 的点的轨迹称为双纽线，已知点 $P(x,y)$ 是 $a=1$ 的双纽线 C 上一点，下列说法正确的是（　　）

A. 若直线 F_1F_2 交双纽线 C 于 A,B,O 三点（O 为坐标原点），则 $|AB|=2\sqrt{2}$

B. 双纽线 C 上满足 $|PF_1|=|PF_2|$ 的点有 2 个

C. $\triangle PF_1F_2$ 的面积的最大值为 $\frac{1}{2}$

D. $\triangle PF_1F_2$ 的周长的取值范围为 $(4,2+2\sqrt{2})$

三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共计 15 分.

12.若 $(x-2)^4=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$，则 $a_0=$______；$\frac{a_1+a_3}{a_0+a_2+a_4}=$______.

13.若不等式 $|x-3|\leqslant a$ 成立的一个充分不必要条件是 $-1\leqslant x\leqslant 7$，则实数 a 的取值范围为______.

14.设函数 $f(x)=x^3-x$，正实数 a,b 满足 $f(a)+f(b)=-2b$，若 $a^2+\lambda b^2\leqslant 1$，则实数 λ 的最大值为______

四、解答题：共 77 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

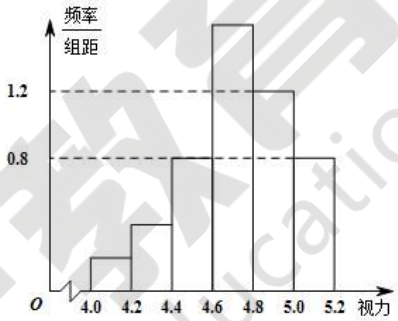
15.已知函数 $f(x)=x+1, g(x)=x^2-1$.

(1) 若 $a\in\mathbf{R}$，求不等式 $af(x)+g(x)<0$ 的解集；

(2) 若 $b\leqslant 3$，对 $\forall x_1\in[1,2]$，$\exists x_2\in[4,5]$，使得 $bf(x_1)+f(x_2)=g(x_1)+b+8$ 成立，求 b 的取值范围.

16. 2021 届高考体检工作即将开展，为了了解高三学生的视力情况，某校医务室提前对本校的高三学生视力情况进行调查，在高三年级 1000 名学生中随机抽取了 100 名学生的体检数据，并得到如下图的频率分布直方图.

年级名次 是否近视	1~100	101~1000
近视	40	30
不近视	10	20



(1) 若直方图中前四组的频数依次成等比数列，试估计全年级高三学生视力的中位数 (精确到 0.01)；

(2) 该校医务室发现，学习成绩突出的学生，近视的比较多，为了研究学生的视力与学习成绩是否有关系，对抽取的 100 名学生名次在 1~100 名和 101~1000 名的学生的体检数据进行了统计，得到表中数据，根据表中的数据，能否在犯错的概率不超过 0.05 的前提下认为视力与学习成绩有关系？

(3) 在 (2) 中调查的不近视的学生中按照分层抽样抽取了 6 人，进一步调查他们良好的护眼习惯，求在这 6 人中任取 2 人，至少有 1 人的年级名次在 1~100 名的概率.

$P(K^2\geqslant k)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005
k	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879

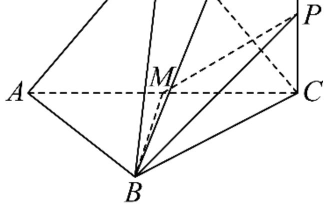
$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

17.在三棱台 $DEF-ABC$ 中，$CF\perp$ 平面 ABC，$AB\perp BC$，且 $BA=BC$，$AC=2DF$，M 为 AC 的中点，P 是 CF 上一点，且 $\dfrac{CF}{DF}=\dfrac{MC}{CP}=\lambda(\lambda>1)$.

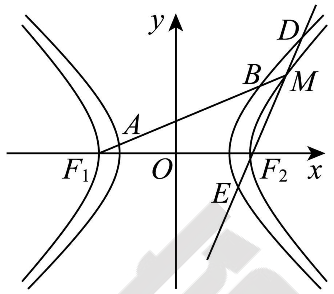
(1) 求证：$CD\perp$ 平面 PBM；

(2) 已知 $CP=1$，且直线 BC 与平面 PBM 的所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ 时，

求平面 EFM 与平面 PBM 所成夹角的余弦值.



18.如图，双曲线 C_1:$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点 F_1，F_2 分别为双曲线 C_2:$\frac{x^2}{4a^2}-\frac{y^2}{4b^2}=1$ 的左、右顶点，过点 F_1 的直线分别交双曲线 C_1 的左、右两支于 A,B 两点，交双曲线 C_2 的右支于点 M(与点 F_2 不重合)，且 $\triangle BF_1F_2$ 与 $\triangle ABF_2$ 的周长之差为 2.



(1) 求双曲线 C_1 的方程；

(2) 若直线 MF_2 交双曲线 C_1 的右支于 D,E 两点.

①记直线 AB 的斜率为 k_1，直线 DE 的斜率为 k_2，求 k_1k_2 的值；

②试探究：$|DE|-|AB|$ 是否为定值？并说明理由.

19.设实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ ①，有两根 x_1,x_2，则方程可变形为 $a(x-x_1)(x-x_2)=0$，展开得 $ax^2-a(x_1+x_2)x+ax_1x_2=0$ ②，比较①②可以得到 $\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{b}{a},\\x_1x_2=\frac{c}{a},\end{cases}$ 这表明，任何一个一元二次方程的根与系数的关系为：两个根的和等于一次项系数与二次项系数的比的相反数，两个根的积等于常数项与二次项系数的比. 这就是我们熟知的一元二次方程的韦达定理.事实上，与二次方程类似，一元三次方程也有韦达定理.

设方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0(a\neq0)$ 有三个根 x_1,x_2,x_3，则有 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}\\x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\frac{c}{a}\\x_1x_2x_3=-\frac{d}{a}\end{cases}$ ③

(1) 证明公式③，即一元三次方程的韦达定理；

(2) 已知函数 $f(x)=ax^3+bx^2+x+1(a<0)$ 恰有两个零点.

(i) 求证：$f(x)$ 的其中一个零点大于 0，另一个零点大于 -2 且小于 0；

(*ii*) 求 $a+b$ 的取值范围.

树德中学高2022级高三开学数学考试试题
参考答案

1.A　2.B　3.B　4.C　5.A　6. C　7.C　8.D　9.ACD　10.BC　11.ACD

8.【详解】因为 $x_1<x_2$，所以 $x_1-x_2<0$，则 $\dfrac{x_2e^{x_1}-x_1e^{x_2}}{x_1-x_2}<a$ 可化为 $x_2e^{x_1}-x_1e^{x_2}>a(x_1-x_2)$，

整理得 $x_2e^{x_1}+ax_2>x_1e^{x_2}+ax_1$，因为 $x_1x_2>0$，所以 $\dfrac{e^{x_1}}{x_1}+\dfrac{a}{x_1}>\dfrac{e^{x_2}}{x_2}+\dfrac{a}{x_2}$，

令 $f(x)=\dfrac{e^x}{x}+\dfrac{a}{x}$，则函数 $f(x)$ 在 $[-1,0)$ 上单调递减，

则 $f'(x)=\dfrac{e^x(x-1)-a}{x^2}\leqslant 0$ 在 $[-1,0)$ 上恒成立，所以 $e^x(x-1)\leqslant a$ 在 $[-1,0)$ 上恒成立，

令 $g(x)=e^x(x-1)$，则 $g'(x)=e^x(x-1)+e^x=xe^x<0$ 在 $[-1,0)$ 上恒成立，

则 $g(x)=e^x(x-1)$ 在 $[-1,0)$ 上单调递减，所以 $g(x)\leqslant g(-1)=-\dfrac{2}{e}$，

故 $a\geqslant -\dfrac{2}{e}$，所以 a 得最小值为 $-\dfrac{2}{e}$.

11.【详解】由双纽线的定义可得：$|PF_1|\cdot|PF_2|=\sqrt{(x+a)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-a)^2+y^2}=a^2$，

即 $[(x+a)^2+y^2]\cdot[(x-a)^2+y^2]=a^4$，化简得：$(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$，

当 $a=1$ 时，点 P 的轨迹方程为 $(x^2+y^2)^2=2(x^2-y^2)$，

令 $y=0$，解得 $x=\pm\sqrt{2}$ 或 $x=0$，所以 $|AB|=2\sqrt{2}$，故 A 正确；

因为 $F_1(-a,0)$，$F_2(a,0)$，若满足 $|PF_1|=|PF_2|$，则点 P 在 y 轴上，

在方程中 $(x^2+y^2)^2=2(x^2-y^2)$ 令 $x=0$，解得 $y=0$，

所以满足 $|PF_1|=|PF_2|$ 的点 P 为 $P(0,0)$，只有一个，故 B 错误；

$S_{\triangle F_1PF_2}=\dfrac{1}{2}|PF_1||PF_2|\sin\angle F_1PF_2=\dfrac{1}{2}\sin\angle F_1PF_2\leqslant\dfrac{1}{2}$，故 C 正确；

因为 $C_{\triangle PF_1F_2}=|PF_1|+|PF_2|+|F_1F_2|=2+|PF_1|+|PF_2|$，

又 $|PF_1||PF_2|=1$，且 $|PF_1|+|PF_2|>|F_1F_2|=2$，所以 $C_{\triangle PF_1F_2}=2+|PF_1|+|PF_2|>4$，

接下来先证明 $|PO|\leqslant\sqrt{2}a$：

在 $\triangle F_1PF_2$ 中，由余弦定理可得 $|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\cos\angle F_1PF_2$，

所以 $|PF_1|^2+|PF_2|^2=4a^2+2a^2\cos\angle F_1PF_2$.

又因为 $2\overrightarrow{PO}=\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}$，所以 $\left(2\overrightarrow{PO}\right)^2=\left(\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}\right)^2$

$=\left|\overrightarrow{PF_1}\right|^2+\left|\overrightarrow{PF_2}\right|^2+2\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=\left|\overrightarrow{PF_1}\right|^2+\left|\overrightarrow{PF_2}\right|^2+2\left|\overrightarrow{PF_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{PF_2}\right|\cos\angle F_1PF_2$.

所以 $(2|PO|)^2+|F_1F_2|^2=\left|\overrightarrow{PF_1}\right|^2+\left|\overrightarrow{PF_2}\right|^2+2\left|\overrightarrow{PF_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{PF_2}\right|\cos\angle F_1PF_2+|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot$

$|PF_2|\cdot\cos\angle F_1PF_2=2(|PF_1|^2+|PF_2|^2)$，即 $4|PO|^2+4a^2=2\times(4a^2+2a^2\cos\angle F_1PF_2)$，

整理可得 $|PO|^2=a^2+a^2\cos\angle F_1PF_2\leqslant 2a^2$，所以 $|PO|\leqslant\sqrt{2}a$；所以 $|PO|\leqslant\sqrt{2}$，

如图以 PF_1、PF_2 为邻边作平行四边形 PF_1GF_2，

则 $|GF_1|=|PF_2|$，所以 $|PF_1|+|PF_2|=|PF_1|+|GF_1|<|PG|=2|PO|\leqslant 2\sqrt{2}$，

所以 $C_{\triangle PF_1F_2}=2+|PF_1|+|PF_2|<2+2\sqrt{2}$，

即 $\triangle PF_1F_2$ 的周长的取值范围为 $(4,2+2\sqrt{2})$，故 D 正确.

12.　16　　$-\dfrac{40}{41}$　　13.　$(4,+\infty)$　　14.　$2+2\sqrt{2}$

14.【详解】因为 $f(x)=x^3-x$，所以 $f(a)=a^3-a$，$f(b)=b^3-b$，

又 $f(a)+f(b)=-2b$，所以 $a^3-a+b^3-b=-2b$，即 $a^3+b^3=a-b$，

因为$a>0,b>0$,所以$a^3+b^3>0$,所以$a>b>0$,所以$\dfrac{a^3+b^3}{a-b}=1$,

又$a^2+\lambda b^2\leqslant 1$,即$a^2+\lambda b^2\leqslant\dfrac{a^3+b^3}{a-b}$,所以$\lambda b^2\leqslant\dfrac{b^3+a^2b}{a-b}$,所以$\lambda\leqslant\dfrac{b^2+a^2}{ab-b^2}=\dfrac{1+\left(\frac{a}{b}\right)^2}{\frac{a}{b}-1}$,

令$t=\dfrac{a}{b}$,则$t>1$,所以$\dfrac{1+\left(\frac{a}{b}\right)^2}{\frac{a}{b}-1}=\dfrac{1+t^2}{t-1}=\dfrac{t^2-1+2}{t-1}=t+1+\dfrac{2}{t-1}$

$=(t-1)+\dfrac{2}{t-1}+2\geqslant 2\sqrt{(t-1)\cdot\dfrac{2}{t-1}}+2=2+2\sqrt{2}$,

当且仅当$t-1=\dfrac{2}{t-1}$,即$t=\sqrt{2}+1$时取等号,

所以$\left(\dfrac{b^2+a^2}{ab-b^2}\right)_{\min}=2(\sqrt{2}+1)$,所以$\lambda\leqslant 2+2\sqrt{2}$,则实数$\lambda$的最大值为$2+2\sqrt{2}$.

15.(1)$a<2$时,不等式的解集为$\{x\mid -1<x<1-a\}$;

$a=2$时,不等式的解集为$\varnothing$;

$a>2$时,不等式的解集为$\{x\mid 1-a<x<-1\}$;

(2)$\dfrac{5}{2}\leqslant b\leqslant 2\sqrt{2}$;

16.【详解】(1) 由图可知,第三组和第六组的频数为$100\times0.8\times0.2=16$人

第五组的频数为$100\times1.2\times0.2=24$人

所以前四组的频数和为$100-(24+16)=60$人

而前四组的频数依次成等比数列

故第一组的频数为4人,第二组的频数为8人,第四组的频数为32人

所以中位数落在第四组,设为x,

因此有$\dfrac{x-4.6}{0.2}=\dfrac{50-(4+8+16)}{32}$(或$1.6(x-4.6)=0.22$)

解得$x=4.7375$所以中位数是4.74

(2) 因为$K^2=\dfrac{100\times(40\times20-30\times10)^2}{50\times50\times70\times30}=\dfrac{100}{21}\approx4.762$, 所以$K^2>3.841$

因此在犯错的概率不超过0.05的前提下认为视力与学习成绩有关系

(3) 依题意按照分层抽样在不近视的学生中抽取了6人中年级名次在1~100名和101~1000名的分别有2人和4人,从6人中任意抽取2人的基本事件共15个至少有1人来自于1~100名的基本事件有9个,所以至少有1人的年级名次在1~100名的概率为$P=\dfrac{9}{15}=\dfrac{3}{5}$.

17. (1)$\because BA=BC$,且M是AC的中点,则$BM\perp AC$.

$\because CF\perp$平面ABC,$BM\subset$平面ABC,$\therefore CF\perp BM$.

又$CF\cap AC=C$,$CF,AC\subset$平面$ACFD$,$\therefore BM\perp$平面$ACFD$,

因为$DC\subset$平面$ACFD$,$\therefore DC\perp BM$.①

$\because\dfrac{CF}{DF}=\dfrac{MC}{CP}$,$\angle CFD=\angle MCP=\dfrac{\pi}{2}$,$\therefore\triangle CFD\backsim\triangle MCP$,则$\angle PMC=\angle FCD$.

$\because\angle ACD+\angle FCD=\dfrac{\pi}{2}$,$\therefore\angle PMC+\angle ACD=\dfrac{\pi}{2}$,$\therefore$在平面$ACFD$中$DC\perp PM$.②

$\because BM\cap PM=M$,$BM,PM\subset$平面PBM,$\therefore$由①②知$DC\perp$平面PBM.

(2) 由题意得$DM\parallel CF$,$CF\perp$平面ABC,

$\therefore DM\perp$平面ABC. 由(1)可知$BM\perp AC$,故M为坐标原点.

如图,以MB,MC,MD所在直线分别为x,y,z轴,建立空间直角坐标系.

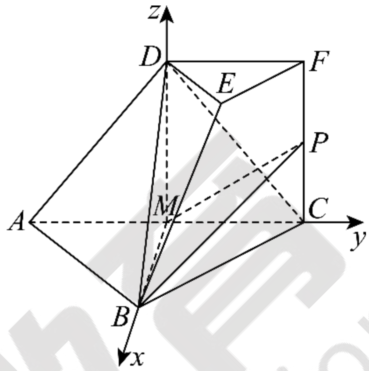
$\because \dfrac{CF}{DF}=\dfrac{DF}{CP}=\lambda$，$CP=1\therefore CM=DF=\lambda$，$DM=CF=\lambda^2$.

$\therefore M(0,0,0)$，$B(\lambda,0,0)$，$C(0,\lambda,0)$，$D(0,0,\lambda^2)$. $\because AC=2DF$，

$\therefore$ 由棱台的性质得 $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{EF},\overrightarrow{BC}=(-\lambda,\lambda,0)$，$\therefore \overrightarrow{ME}=\left(\dfrac{\lambda}{2},\dfrac{\lambda}{2},\lambda^2\right)$.

由 (1) 可知平面 PBM 的一个法向量为 $\overrightarrow{CD}$，且 $\overrightarrow{CD}=(0,-\lambda,\lambda^2)$.

$\because$ 直线 BC 与平面 PBM 的所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，



$\therefore \left|\cos\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD}\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}\right|}{\left|\overrightarrow{BC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CD}\right|}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}(\lambda>0)$，

即 $\dfrac{|-\lambda^2|}{\lambda\sqrt{2}\cdot\lambda\sqrt{\lambda^2+1}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，解得 $\lambda=\sqrt{2}$.

$\therefore$ 平面 PBM 的一个法向量为 $\overrightarrow{CD}$，且 $\overrightarrow{CD}=(0,-\sqrt{2},2)$.

平面 EFM 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$.

$\because \overrightarrow{ME}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},2\right)$，$\overrightarrow{MF}=(0,\sqrt{2},2)$，

$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{ME}=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y+2z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{MF}=\sqrt{2}y+2z=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}y=-\sqrt{2}z\\ x=-\sqrt{2}z\end{cases}$，当 $z=-1$ 时，$x=\sqrt{2}$，$y=\sqrt{2}$.

$\therefore$ 平面 MEF 的一个法向量为 $\vec{n}=(\sqrt{2},\sqrt{2},-1)$. $\left|\cos\vec{n},\overrightarrow{CD}\right|=\dfrac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{CD}\right|}{\left|\vec{n}\right|\left|\overrightarrow{CD}\right|}=\dfrac{2+2}{\sqrt{6}\times\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{30}}{15}$.

$\therefore$ 平面 EFM 与平面 PBM 所成夹角的余弦值 $\dfrac{2\sqrt{30}}{15}$.

18. (1) 解：设 $|F_1F_2|=2c$，因为 $\triangle BF_1F_2$ 与 $\triangle ABF_2$ 的周长之差为 2，

所以 $|BF_1|+|F_1F_2|-|AB|-|AF_2|=2$，即 $2c-2a=2$，

又因为 F_1,F_2 分别为双曲线 C_2:$\dfrac{x^2}{4a^2}-\dfrac{y^2}{4b^2}=1$ 的左、右顶点，所以 $c=2a$，

联立方程组 $\begin{cases}c-a=1\\ c=2a\end{cases}$，解得 $a=1,c=2$，所以 $b^2=c^2-a^2=1$，

故双曲线 C_1 的方程为 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$.

(2) 解：①由 (1) 知，双曲线 C_2 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1,F_1(-2,0),F_2(2,0)$，

设 $M(x_0,y_0)$，则 $\dfrac{x_0^2}{4}-\dfrac{y_0^2}{12}=1$，可得 $y_0^2=3(x_0^2-4)$，

则 $k_1\cdot k_2=\dfrac{y_0}{x_0+2}\cdot\dfrac{y_0}{x_0-2}=\dfrac{y_0^2}{x_0^2-4}=3$.

② $|DE|-|AB|$ 为定值 4.

理由如下：

由 (1) 得直线 AB 的方程为 $y=k_1(x+2)$，

联立方程组 $\begin{cases}y=k_1(x+2)\\ x^2-\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$，整理得 $(3-k_1^2)x^2-4k_1^2x-4k_1^2-3=0$，

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\dfrac{4k_1^2}{3-k_1^2},x_1x_2=\dfrac{-4k_1^2-3}{3-k_1^2}$，

因为A,B位于双曲线的左、右两支，所以$x_1x_2=\dfrac{-4k_1^2-3}{3-k_1^2}<0$，即$k_1^2<3$，

可得$|AB|=\sqrt{(1+k_1^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}=\sqrt{\dfrac{36(1+k_1^2)^2}{(3-k_1^2)^2}}=\dfrac{6(1+k_1^2)}{3-k_1^2}$，

又因为$k_1\cdot k_2=3$，所以直线DE的方程为$y=\dfrac{3}{k_1}(x-2)$，

根据双曲线的对称性，同理可得$|DE|=\dfrac{6\left[1+\left(\frac{3}{k_1}\right)^2\right]}{\left|3-\left(\frac{3}{k_1}\right)^2\right|}=\dfrac{2(9+k_1^2)}{3-k_1^2}$，

所以$|DE|-|AB|=\dfrac{2(9+k_1^2)}{3-k_1^2}-\dfrac{6(1+k_1^2)}{3-k_1^2}=4$，故$|DE|-|AB|$为定值4.

19. (1)证明：因为方程$ax^3+bx^2+cx+d=0(a\neq0)$有三个根x_1,x_2,x_3，

所以方程$ax^3+bx^2+cx+d=0(a\neq0)$即为$a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=0$，

变形为$ax^3-a(x_1+x_2+x_3)x^2+a(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)x-ax_1x_2x_3=0$，

比较两个方程可得$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}\\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\frac{c}{a}\\ x_1x_2x_3=-\frac{d}{a}\end{cases}$.

(2)(i)证明：$\because f(x)$有两个零点，

$\therefore f(x)=0$有一个二重根x_1，一个一重根x_2，且$\begin{cases}x_1\neq0,\\ x_2\neq0,\end{cases}$

由(1)可得$\begin{cases}2x_1+x_2=-\frac{b}{a}\\ x_1^2+2x_1x_2=\frac{1}{a}\\ x_1^2x_2=-\frac{1}{a}\end{cases}$，由$x_1^2+2x_1x_2=\dfrac{1}{a}<0$可得$x_1x_2<0$.

由$x_1^2\cdot x_2=-\dfrac{1}{a}>0$可得$x_2>0$，$\therefore x_1<0<x_2$.

联立上两式可得$x_1^2+2x_1x_2=-x_1^2\cdot x_2$，解得$x_2=-\dfrac{x_1}{x_1+2}$，

又$x_2>0,x_1<0\ \therefore x_1>-2$，综上$-2<x_1<0<x_2$.

(ii)解：由(i)可得$\begin{cases}a=-\frac{1}{x_1^2x_2}=\frac{x_1+2}{x_1^3}=\frac{1}{x_1^2}+\frac{2}{x_1^3}\\ b=\frac{2x_1+x_2}{x_1^2x_2}=\frac{2}{x_1x_2}+\frac{1}{x_1^2}=\frac{-2x_1-4}{x_1^2}+\frac{1}{x_1^2}=-\frac{2}{x_1}-\frac{3}{x_1^2}\end{cases}$，

$\therefore a+b=\dfrac{2}{x_1^3}-\dfrac{2}{x_1^2}-\dfrac{2}{x_1}$.

令$t=\dfrac{1}{x_1}$，$\because x_1\in(-2,0)$，$\therefore t\in\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)$，则$g(t)=2(t^3-t^2-t)$，

$\because g'(t)=2(3t^2-2t-1)=2(3t+1)(t-1)>0$，当$t<-\dfrac{1}{2}$时，$g'(t)>0$，

$\therefore g(t)$在$\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)$上单调递增，$\therefore g(t)<g\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$，

$\therefore a+b\in\left(-\infty,\dfrac{1}{4}\right)$.