成都七中高 2022 级高三上期入学考试参考答案

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每个小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1	2	3	4	5	6	7	8
D	A	B	D	C	B	C	A

二、选择题：本大题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每个小题给出的四个选项中，有多个项是符合题目要求的. 全部选对的得 6 分，部分选对得 3 分，错选得 0 分.

9. BCD　　　　10. AD　　　　11. BC

三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 2　　　　13. $2-\sqrt{3}$　　　　14. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

四、解答题：本大题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. （1）由 $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\sin B\cos A$，

则有 $\cos A\sin B=\sin A\cos B+\sin B\cos A-\dfrac{1}{2}\sin A$，

即 $\sin A\cos B=\dfrac{1}{2}\sin A$，由 $A\in(0,\pi)$，故 $\sin A\neq 0$，

故 $\cos B=\dfrac{1}{2}$，又 $B\in(0,\pi)$，

故 $B=\dfrac{\pi}{3}$；　　　　（7 分）

（2）由 $B=\dfrac{\pi}{3}$，$a=2\sqrt{2}$，

故 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}c=2\sqrt{3}$，

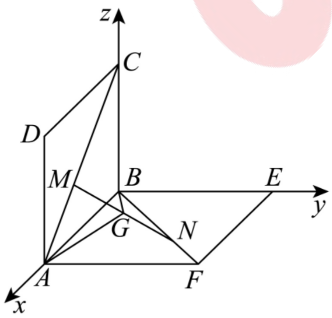
解得 $c=2\sqrt{2}$.　　　　（13 分）

16.（1）以 B 原点建立如图所示的空间直角坐标系，

则 $A(1,0,0)$，$C(0,0,1)$，$F(1,1,0)$，$E(0,1,0)$，

因为 $CM=BN=a$，所以 $M\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}},0,1-\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)$，$N\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}},\dfrac{a}{\sqrt{2}},0\right)$，

所以 $|MN|=\sqrt{a^2-\sqrt{2}a+1}$.



（7 分）

（2）$|MN|=\sqrt{a^2-\sqrt{2}a+1}=\sqrt{\left(a-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}$，当 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$|MN|$ 最小，

此时，M，N 为中点，则 $M\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$，$N\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$），取 MN 的中点 G，连接 AG，BG，

则 $G\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$，因为 $AM=AN$，$BM=BN$，所以 $AG\perp MN$，$BG\perp MN$，

所以 $\angle AGB$ 是平面 MNA 与平面 MNB 的夹角或其补角，

因为 $\overrightarrow{GA}=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4},-\frac{1}{4}\right)$，$\overrightarrow{GB}=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4},-\frac{1}{4}\right)$，

所以 $\cos\langle\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GB}\rangle=\frac{\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}}{|\overrightarrow{GA}|\cdot|\overrightarrow{GB}|}=-\frac{1}{3}$，

所以平面 MNA 与平面 MNB 夹角的余弦值是 $\frac{1}{3}$.　　（15 分）

17. （1）由散点图可知，这些数据集中在图中曲线的附近，

而曲线的形状与函数 $y=\sqrt{x}$ 的图象相似，

故可用类似的表达式 $\hat{y}=b\sqrt{x}+a$ 来描述 y 与 x 的关系，

故三个函数中 $\hat{y}=b\sqrt{x}+a$ 的图象是拟合 y 与 x 的关系“最好”的曲线，

令 $u=\sqrt{x}$，

则 $\hat{y}=bu+a$，

$\because$ $\overline{x}=20$，$\overline{u}=4$，$\overline{i}=668$，$\overline{y}=8$，$\sum_{i=1}^{7}x_i^2=4676$，$\sum_{i=1}^{7}u_i^2=140$，

$\therefore\ \hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{7}u_iy_i-7\overline{u}\cdot\overline{y}}{\sum_{i=1}^{7}u_i^2-7\overline{u}^2}=\frac{283-7\times4\times8}{140-7\times16}\approx2.1$，

$\because$ $\hat{y}=bu+a$ 经过点 $(4,8)$，

$\therefore a=8-2.1\times4=-0.4$，

故 y 关于 x 的回归直线方程为 $\hat{y}=2.1u-0.4$，即 $\hat{y}=2.1\sqrt{x}-0.4$.　　（7 分）

（2）说法“高度从 $1000cm$ 长到 $1001cm$ 所需时间超过一年”成立，

设其幼苗从观察之日起，第 m 天的高度为 $1000cm$，

有 $1000=2.1\sqrt{m}-0.4$，解得 $m\approx226939$，

第 n 天的高度为 $1001cm$，

有 $1001=2.1\sqrt{n}-0.4$，解得 $n\approx227393$，

$n-m=227393-226939=454$天，

故说法“高度从$1000cm$长到$1001cm$所需时间超过一年”成立．（15 分）

18.（1）设$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$．由$\triangle F_1PF_2$的垂心为$H\left(\frac{2\sqrt{6}}{3},-\frac{5}{3}\right)$，得$F_1H\perp PF_2$．

所以$k_{F_1H}\cdot k_{PF_2}=\dfrac{-\frac{5}{3}}{\frac{2\sqrt{6}}{3}+c}\cdot\dfrac{1}{\frac{2\sqrt{6}}{3}-c}=-1$，$\frac{24}{9}-c^2=\frac{5}{3}$，解得$c^2=1$．

由点$P\left(\frac{2\sqrt{6}}{3},1\right)$在椭圆$C$上，得$\frac{24}{9a^2}+\frac{1}{b^2}=1$．结合$a^2-b^2=c^2=1$，解得$a^2=4$，$b^2=3$．

所以椭圆C的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$．（5 分）

（2）由（1）知$A(-2,0)$，$F_2(1,0)$．

若l的斜率不存在，则由对称性，知$k_1+k_2=0$，不符合要求．

若l的存在，设为k，则l的方程为$y=k(x-1)$．

由$\begin{cases}y=k(x-1)\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$，得$(4k^2+3)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$．

设$D(x_1,y_1)$，$E(x_2,y_2)$，则$x_1+x_2=\frac{8k^2}{4k^2+3}$，$x_1x_2=\frac{4k^2-12}{4k^2+3}$．

所以$k_1+k_2=\frac{y_1}{x_1+2}+\frac{y_2}{x_2+2}=\frac{k(x_1-1)}{x_1+2}+\frac{k(x_2-1)}{x_2+2}$

$$=k\left(1-\frac{3}{x_1+2}+1-\frac{3}{x_2+2}\right)=k\cdot\left[2-\frac{3(x_1+x_2+4)}{(x_1+2)(x_2+2)}\right]$$

$$=k\cdot\left[2-\frac{3(x_1+x_2+4)}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}\right]=k\cdot\left[2-\frac{3\left(\frac{8k^2}{4k^2+3}+4\right)}{\frac{4k^2-12}{4k^2+3}+2\times\frac{8k^2}{4k^2+3}+4}\right]$$

$$=k\cdot\left[2-\frac{3(8k^2+16k^2+12)}{4k^2-12+16k^2+16k^2+12}\right]=k\cdot\left(2-\frac{2k^2+1}{k^2}\right)=-\frac{1}{k}.$$

又$k_1+k_2=-\frac{1}{7}$，因此$k=7$，直线l的方程为$y=7(x-1)$．（11 分）

(3) 设$Q(x_0,y_0)$，$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，则

$|QF_1||QF_2|=\frac{1}{2}\left(\left(|QF_1|+|QF_2|\right)^2-|QF_1|^2-|QF_2|^2\right)=\frac{1}{2}\left(4a^2-\left(x_0+c\right)^2-y_0^2-\left(x_0-c\right)^2-y_0^2\right)$

$=a^2+b^2-x_0^2-y_0^2$

设过 Q 点处的切线方程为 $A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)=1$, 与椭圆联立求解出切线方程为

$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$. 则坐标原点到切线距离 d：$d^2=\frac{a^4b^4}{b^4x_0^2+a^4y_0^2}$.（*）

又因为 $b^2x_0^2+a^2y_0^2=a^2b^2$, 所以

$b^4x_0^2+a^4y_0^2=b^2\left(a^2b^2-a^2y_0^2\right)+a^2\left(a^2b^2-b^2x_0^2\right)=a^2b^2\left(a^2+b^2-x_0^2-y_0^2\right)$

代入到（*）中，故 $d^2|QF_1||QF_2|=a^2b^2=12$ （17 分）

19. (1) 由于 $g'(x)=\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)$, 且 $x\in(0,+\infty)$，所以 $g'(x)>0$，原函数在定义域内单调递增. （3 分）

(2) 考虑 $h'(x)=\left(1-\frac{1}{e}\right)x^{-\frac{1}{e}}-\ln(1-x)-1$. 令 $g(x)=\ln(1-x)+x$，由于 $g'(x)=1-\frac{1}{1-x}<0, \forall x\in(0,1)$. 所以 $g(x)\le g(0)$, 从而 $\ln(1-x)\le -x$. 故 $h'(x)\ge\left(1-\frac{1}{e}\right)x^{-\frac{1}{e}}+x-1\ge\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{3}}+x-1$. 令

$m(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{3}}+x-1, m'(x)=-\frac{1}{6}x^{-\frac{4}{3}}+1=0$, $m(x)$ 在 $\left(0,6^{-\frac{3}{4}}\right)$ 单调递减，在 $\left(6^{-\frac{3}{4}},1\right)$ 单调递增，$m(x)\ge m\left(6^{-\frac{3}{4}}\right)=\frac{2}{3}6^{\frac{1}{4}}-1>0$. 所以 $h(x)$ 单调递增，$h(x)\ge h(0)=0$.

$x\to1$, $h(x)\to1$. 故值域为 $[0,1)$. （10 分）

(3) 令 $t=y-x\in(0,1), x\in(0,1-t]$，考虑函数 $f_t(x)=(x+t)\ln(x+t)-x\ln x$. 考虑对 x 求导，则 $f'_t(x)=\ln\left(1+\frac{t}{x}\right)>0$. 只需证明：

(a) 当 $x\to0^+$，$\left|f_t(x)\right|\to -t\ln t\le t^{1-\frac{1}{e}}$

(b) 当 $-(1-t)\ln(1-t)=\left|f_t(1-t)\right|\le t^{1-\frac{1}{e}}$

(b) 在第二问中已经说明，考虑（a），令 $g(t)=t^{-\frac{1}{e}}+\ln t$, 则 $g'(t)=\frac{\left(-\frac{1}{e}t^{-\frac{1}{e}}+1\right)}{t}$，故 $g(t)$ 在 $\left(0,e^{-e}\right)$ 递减，在 $\left(e^{-e},1\right)$ 上递增. 故 $g(t)\ge g\left(e^{-e}\right)=0$. 证毕。（17 分）