成都市 2022 级高中毕业班摸底测试

数学参考答案及评分意见

一、选择题:(每小题 5 分,共 40 分)

1. C；　2. A；　3. B；　4. D；　5. C；　6. A；　7. C；　8. B.

二、选择题:(每小题 6 分,共 18 分)

9. ABD；　10. ACD；　11. AC.

三、填空题:(每小题 5 分,共 15 分)

12. e；　13. 60,24；　14. 333.

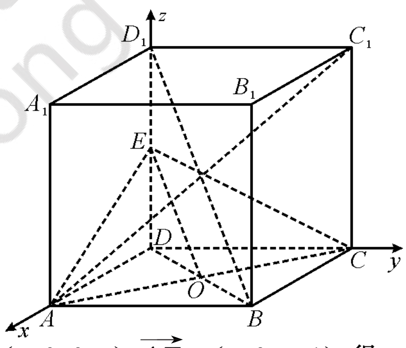
四、解答题:(共 77 分)

15. 解:(Ⅰ)连接 BD,设 $AC\cap BD=O$,连接 EO,则 O 为 BD 中点. ……1 分

在$\triangle BDD_1$ 中,因为 O,E 为中点,所以 $OE\parallel BD_1$. ……3 分

又因为 $BD_1\not\subset$平面 ACE,$OE\subset$平面 ACE,

所以 $BD_1\parallel$平面 ACE. ……5 分



(Ⅱ)以 D 为坐标原点,DA,DC,DD_1 所在直线分别为 x,y,z 轴建立如图所示的空间直角坐标系.

设正方体棱长为 2,

则 $A(2,0,0),C(0,2,0),E(0,0,1),C_1(0,2,2)$,

$\overrightarrow{AC_1}=(-2,2,2)$. ……7 分

设 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$为平面 ACE 的一个法向量,由$\overrightarrow{AC}=(-2,2,0)$,$\overrightarrow{AE}=(-2,0,1)$,得

$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AE}=0.\end{cases}$即$\begin{cases}-2x+2y=0,\\ -2x+z=0.\end{cases}$令 $x=1$ 得 $\boldsymbol{m}=(1,1,2)$. ……10 分

设 AC_1 与平面 ACE 所成角大小为 θ,则

$\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{AC_1}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC_1}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\overrightarrow{AC_1}|}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. ……12 分

所以 AC_1 与平面 ACE 所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. ……13 分

16. 解:(Ⅰ)由 $a_4=7,a_{2n}=2a_n+1$,令 $n=2$ 得 $a_2=3$. ……2 分

设$\{a_n\}$的公差为 d,

因为 $a_4=a_2+2d$，所以 $d=2$. ……4 分

所以 $a_n=a_2+(n-2)d=2n-1$.

故$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2n-1$. ……6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $b_n=(2n-1)\cdot 3^n$. ……7 分

$S_n=1\times 3^1+3\times 3^2+\cdots+(2n-1)\cdot 3^n$，①

$3S_n=1\times 3^2+\cdots+(2n-3)\cdot 3^n+(2n-1)\cdot 3^{n+1}$，② ……10 分

①－②得

$-2S_n=3^1+2\times 3^2+\cdots+2\times 3^n-(2n-1)\cdot 3^{n+1}=3+\dfrac{18(1-3^{n-1})}{1-3}-(2n-1)\cdot 3^{n+1}$，

……13 分

化简得 $-2S_n=-6-(2n-2)\cdot 3^{n+1}$. ……14 分

所以 $S_n=3+(n-1)\cdot 3^{n+1}$. ……15 分

17. 解：（Ⅰ）设事件 A_1＝“成都蓉城队主场与 A 队比赛获得积分为 3 分”，

事件 A_2＝“成都蓉城队主场与 A 队比赛获得积分为 1 分”，

事件 A_3＝“成都蓉城队主场与 A 队比赛获得积分为 0 分”，

事件 B_1＝“成都蓉城队客场与 B 队比赛获得积分为 3 分”，

事件 B_2＝“成都蓉城队客场与 B 队比赛获得积分为 1 分”，

事件 B_3＝“成都蓉城队客场与 B 队比赛获得积分为 0 分”，

事件 C＝“成都蓉城队七月主场与 A 队比赛获得积分超过客场与 B 队比赛获得积分”.

则 $P(C)=P(A_1B_2)+P(A_1B_3)+P(A_2B_3)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{11}{24}$.

所以成都蓉城队七月主场与 A 队比赛获得积分超过客场与 B 队比赛获得积分的概率为 $\dfrac{11}{24}$. ……5 分

（Ⅱ）由题意可知 X 的所有可能取值为 0，1，2，3，4，6，

$P(X=0)=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{24}$，　　$P(X=1)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}$，

$P(X=2)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$，　　$P(X=3)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{6}$，

$P(X=4)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}$，　　$P(X=6)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{8}$. ……11 分

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2	3	4	6
P	$\dfrac{1}{24}$	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{8}$

……12 分

所以 X 的期望 $E(X)=0\times\frac{1}{24}+1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{3}+6\times\frac{1}{8}=\frac{37}{12}$.

……15 分

18. 解：(Ⅰ)因为直线 AB 的倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$，所以 $k_{AB}=1$. ……1 分

由题意，抛物线 E 的焦点 F 坐标为 $(0,\frac{p}{2})$. ……2 分

所以直线 AB 的方程为 $y=x+\frac{p}{2}$. ……3 分

因为圆的方程为 $x^2+y^2-4y=0$，即 $x^2+(y-2)^2=4$，

所以圆心坐标为 $(0,2)$，半径为 2. ……4 分

所以圆心到直线 AB 的距离 $d=\frac{\left|2-\frac{p}{2}\right|}{\sqrt{2}}$. ……5 分

由垂径定理得 $d^2+\left(\frac{\sqrt{14}}{2}\right)^2=4$，解得 $p=2$ 或 $p=6$.

故 $p=2$ 或 $p=6$. ……7 分

(Ⅱ)由题意，直线 AB 斜率存在，

设直线 AB：$y=kx+\frac{p}{2}$，$A\left(x_1,\frac{x_1^2}{2p}\right)$，$B\left(x_2,\frac{x_2^2}{2p}\right)$，

由 $\begin{cases}y=kx+\frac{p}{2},\\x^2=2py\end{cases}$ 消去 y 得 $x^2-2kpx-p^2=0$，

$\Delta=4p^2(k^2+1)>0$.

$x_1+x_2=2kp$，$x_1x_2=-p^2$. ……9 分

故 AB 中点 M 坐标为 $\left(kp,k^2p+\frac{p}{2}\right)$，设 $C(t,0)$， ……10 分

由 $CM\perp AB$ 得 $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，

即 $(kp-t)\times1+\left(k^2p+\frac{p}{2}\right)\cdot k=0$，整理得 $\frac{3kp}{2}+k^3p-t=0$. ① ……12 分

由 $CA\perp CB$ 得 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=(x_1-t)(x_2-t)+\frac{x_1^2x_2^2}{4p^2}=0$，

即 $x_1x_2-t(x_1+x_2)+t^2+\frac{x_1^2x_2^2}{4p^2}=0$，

代入整理得 $t^2-2kpt-\frac{3p^2}{4}=0$. ② ……14 分

由①②消去 t 得 $k^2p^2\left(k^2+\frac{3}{2}\right)^2-2k^2p^2\left(k^2+\frac{3}{2}\right)-\frac{3}{4}p^2=0$，

即 $4k^2\left(k^2+\frac{3}{2}\right)^2-8k^2\left(k^2+\frac{3}{2}\right)-3=0$，

整理得 $(k^2+1)\left(k^4-\frac{3}{4}\right)=0$. ……15 分

所以 $k^4=\frac{3}{4}$，解得 $k=\pm\frac{\sqrt[4]{12}}{2}$.

综上，直线 AB 的斜率 $k=\pm\frac{\sqrt[4]{12}}{2}$. ……17 分

19. 解：(Ⅰ)当 $a=2$ 时，$f(x)=2x-\ln(x+2)(x>-2)$，

$f'(x)=2-\frac{1}{x+2}=\frac{2x+3}{x+2}$. ……2 分

故当 $x\in\left(-2,-\frac{3}{2}\right)$，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

当 $x\in\left(-\frac{3}{2},+\infty\right)$，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增.

综上，$f(x)$的单调递减区间为$\left(-2,-\frac{3}{2}\right)$，单调递增区间为$\left(-\frac{3}{2},+\infty\right)$. ……4 分

(Ⅱ)由题意，$a\neq 0$.

$f'(x)=a-\frac{1}{x+a}=\frac{ax+a^2-1}{x+a}(x>-a)$. ……5 分

①当 $a<0$ 时，$f(x)$在$(-a,+\infty)$单调递减，

由 $x\to+\infty$，$f(x)\to-\infty$，不合题意； ……6 分

②当 $a>0$ 时，$f(x)$在$\left(-a,\frac{1}{a}-a\right)$单调递减，$\left(\frac{1}{a}-a,+\infty\right)$单调递增.

……7 分

由 $f(x)\geqslant a-\frac{1}{a}$ 恒成立，得 $f(x)_{\min}\geqslant a-\frac{1}{a}$.

$f(x)_{\min}=f\left(\frac{1}{a}-a\right)=1-a^2-\ln\left(\frac{1}{a}-a+a\right)=1-a^2+\ln a\geqslant a-\frac{1}{a}$.

即 $1-a^2+\ln a-a+\frac{1}{a}\geqslant 0$.

令 $g(a)=1-a^2+\ln a-a+\frac{1}{a}$，

$g'(a)=-2a+\frac{1}{a}-1-\frac{1}{a^2}=\frac{-2a^3+a-a^2-1}{a^2}=\frac{-2a^3-(a^2-a+1)}{a^2}<0$ 恒成立，

所以 $g(a)$在$(0,+\infty)$单调递减，且 $g(1)=0$. ……9 分

故当 $a\in(0,1]$，$g(a)\geqslant 0$，符合题意，

当 $a\in(1,+\infty)$，$g(a)<0$，不合题意.

综上，a 的取值范围为 $(0,1]$.　　　　……10 分

(Ⅲ)由 $a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{n^2}{n^2a_n+1}$，

得 $a_2=\dfrac{1}{2}$，且 $a_n>0$.

由(Ⅱ)可知，令 $a=1$，有 $x\geqslant\ln(x+1)$ 可得 $\ln x\leqslant x-1$，

令 $x=\dfrac{1}{t}$ 可得 $\ln\dfrac{1}{t}\leqslant\dfrac{1}{t}-1$ 即 $\ln x\geqslant 1-\dfrac{1}{x}$.　　　　……12 分

由 $a_{n+1}=\dfrac{n^2}{n^2a_n+1}$ 得 $a_{n+1}=\dfrac{1}{a_n+\dfrac{1}{n^2}}$ 即 $\dfrac{1}{a_{n+1}}=a_n+\dfrac{1}{n^2}$.

两边取对数得 $\ln\dfrac{1}{a_{n+1}}=\ln\left(a_n+\dfrac{1}{n^2}\right)$，由上述不等式得

$\ln\dfrac{1}{a_{n+1}}\geqslant 1-\dfrac{1}{\dfrac{1}{a_{n+1}}}=1-a_{n+1}$，$\ln\left(a_n+\dfrac{1}{n^2}\right)\leqslant a_n+\dfrac{1}{n^2}-1$，

于是 $1-a_{n+1}\leqslant a_n+\dfrac{1}{n^2}-1$，

所以 $a_{n+1}+a_n\geqslant 2-\dfrac{1}{n^2}$.　　　　……14 分

当 $n=1$ 时，$S_2=a_1+a_2=\dfrac{3}{2}>1=2\times1-1$，不等式成立；

当 $n\geqslant 2$ 时，

$$\begin{aligned}S_{2n}&=a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{2n-1}+a_{2n}\\&\geqslant\frac{3}{2}+2-\frac{1}{3^2}+2-\frac{1}{5^2}+\cdots+2-\frac{1}{(2n-1)^2}\\&=\frac{3}{2}+2(n-1)-\left[\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}\right]\\&>2n-\frac{1}{2}-\left[\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\cdots+\frac{1}{(2n-3)(2n-1)}\right]\\&=2n-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}\right)\\&=2n-1+\frac{1}{2(2n-1)}>2n-1.\end{aligned}$$

即当 $n\geqslant 2$ 时，不等式成立.

综上，$S_{2n}>2n-1$ 得证.　　　　……17 分