2024年普通高等学校招生全国统一考试

全国甲卷文科数学

使用范围：陕西、宁夏、青海、内蒙古、四川

注意事项：

1．答题前，务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上．

2．答选择题时，必须使用2B铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦擦干净后，再选涂其它答案标号．

3．答非选择题时，必须使用0.5毫米黑色签字笔，将答案书写在答题卡规定的位置上．

4．所有题目必须在答题卡上作答，在试题卷上答题无效．

5．考试结束后，只将答题卡交回．

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 集合 $A=\{1,2,3,4,5,9\}$， $B=\{x|x+1\in A\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\{1,2,3,4\}$　　**B.** $\{1,2,3\}$　　**C.** $\{3,4\}$　　**D.** $\{1,2,9\}$

【答案】A

【分析】根据集合 B 的定义先算出具体含有的元素，然后根据交集的定义计算.

【详解】依题意得，对于集合 B 中的元素 x，满足 $x+1=1,2,3,4,5,9$，

则 x 可能的取值为 $0,1,2,3,4,8$，即 $B=\{0,1,2,3,4,8\}$，

于是 $A\cap B=\{1,2,3,4\}$.

故选：A

2. 设 $z=\sqrt{2}\mathrm{i}$，则 $z\cdot\overline{z}=$（　　）

A. -i　　B. 1　　C. -1　　D. 2

【答案】D

【分析】先根据共轭复数的定义写出 $\overline{z}$，然后根据复数的乘法计算.

【详解】依题意得，$\overline{z}=-\sqrt{2}\mathrm{i}$，故 $z\overline{z}=-2\mathrm{i}^2=2$.

故选：D

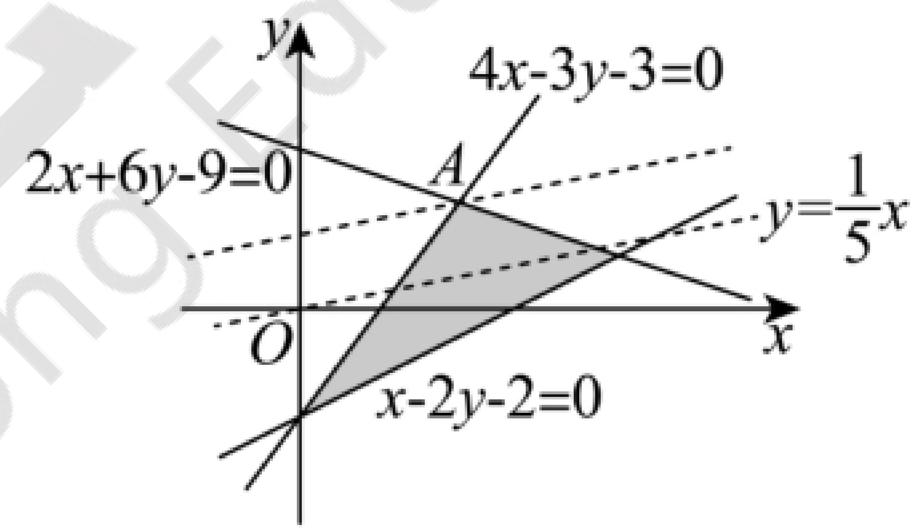
3. 若实数x,y满足约束条件$\begin{cases}4x-3y-3\geq 0\\ x-2y-2\leq 0\\ 2x+6y-9\leq 0\end{cases}$，则$z=x-5y$的最小值为（　　）

A. 5　　B. $\frac{1}{2}$　　C. -2　　D. $-\frac{7}{2}$

【答案】D

【分析】画出可行域后，利用z的几何意义计算即可得.

【详解】实数x,y满足$\begin{cases}4x-3y-3\geq 0\\ x-2y-2\leq 0\\ 2x+6y-9\leq 0\end{cases}$，作出可行域如图：



由$z=x-5y$可得$y=\frac{1}{5}x-\frac{1}{5}z$，

即z的几何意义为$y=\frac{1}{5}x-\frac{1}{5}z$的截距的$-\frac{1}{5}$，

则该直线截距取最大值时，z有最小值，

此时直线$y=\frac{1}{5}x-\frac{1}{5}z$过点A，

联立$\begin{cases}4x-3y-3=0\\ 2x+6y-9=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=\frac{3}{2}\\ y=1\end{cases}$，即$A\left(\frac{3}{2},1\right)$，

则$z_{\min}=\frac{3}{2}-5\times 1=-\frac{7}{2}$.

故选：D

4. 等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$S_9=1$，$a_3+a_7=$（　　）

A. -2　　B. $\frac{7}{3}$　　C. 1　　D. $\frac{2}{9}$

【答案】D

【分析】可以根据等差数列的基本量，即将题目条件全转化成a_1和d来处理，亦可用等差数列的性质进行处理，或者特殊值法处理.

【详解】方法一：利用等差数列的基本量

由$S_9=1$，根据等差数列的求和公式，$S_9=9a_1+\frac{9\times 8}{2}d=1\Leftrightarrow 9a_1+36d=1$，

又$a_3+a_7=a_1+2d+a_1+6d=2a_1+8d=\frac{2}{9}(9a_1+36d)=\frac{2}{9}$.

故选：D

方法二：利用等差数列的性质

根据等差数列的性质，$a_1+a_9=a_3+a_7$，由$S_9=1$，根据等差数列的求和公式，

$S_9=\frac{9(a_1+a_9)}{2}=\frac{9(a_3+a_7)}{2}=1$，故$a_3+a_7=\frac{2}{9}$.

故选：D

方法三：特殊值法

不妨取等差数列公差$d=0$，则$S_9=1=9a_1\Rightarrow a_1=\frac{1}{9}$，则$a_3+a_7=2a_1=\frac{2}{9}$.

故选：D

5. 甲、乙、丙、丁四人排成一列，丙不在排头，且甲或乙在排尾的概率是（　　）

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

【答案】B

【分析】分类讨论甲乙的位置，得到符合条件的情况，然后根据古典概型计算公式进行求解.

【详解】当甲排在排尾，乙排第一位，丙有2种排法，丁就1种，共2种；

当甲排在排尾，乙排第二位或第三位，丙有1种排法，丁就1种，共2种；

于是甲排在排尾共4种方法，同理乙排在排尾共4种方法，于是共8种排法符合题意；

基本事件总数显然是$A_4^4=24$，

根据古典概型的计算公式，丙不在排头，甲或乙在排尾的概率为$\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$.

故选：B

6. 已知双曲线的两个焦点分别为$(0,4),(0,-4)$，点$(-6,4)$在该双曲线上，则该双曲线的离心率为（　　）

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. $\sqrt{2}$

【答案】C

【分析】由焦点坐标可得焦距$2c$，结合双曲线定义计算可得$2a$，即可得离心率.

【详解】设$F_1(0,-4)$、$F_2(0,4)$、$P(-6,4)$，

则$|F_1F_2|=2c=8$，$|PF_1|=\sqrt{6^2+(4+4)^2}=10$，$|PF_2|=\sqrt{6^2+(4-4)^2}=6$，

则$2a=|PF_1|-|PF_2|=10-6=4$，则$e=\frac{2c}{2a}=\frac{8}{4}=2$.

故选：C.

7. 曲线$f(x)=x^6+3x-1$在$(0,-1)$处的切线与坐标轴围成的面积为（　　）

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】A

【解析】

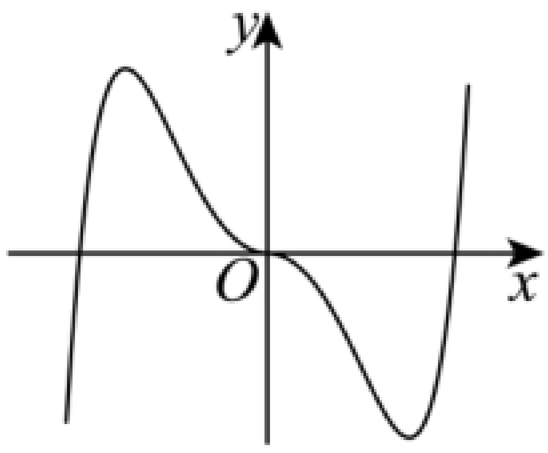
【分析】先求出切线方程，再求出切线的截距，从而可求面积.

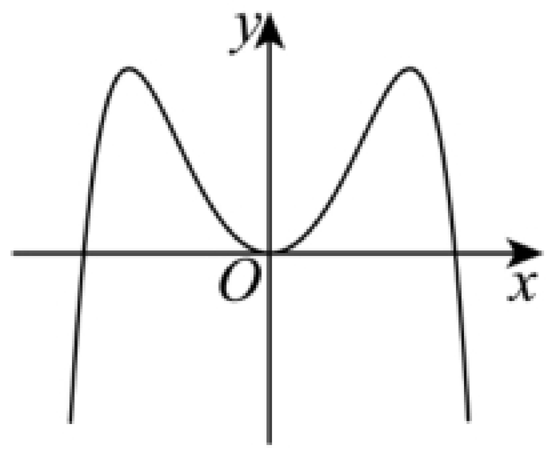
【详解】$f'(x)=6x^5+3$，所以$f'(0)=3$，故切线方程为$y=3(x-0)-1=3x-1$，

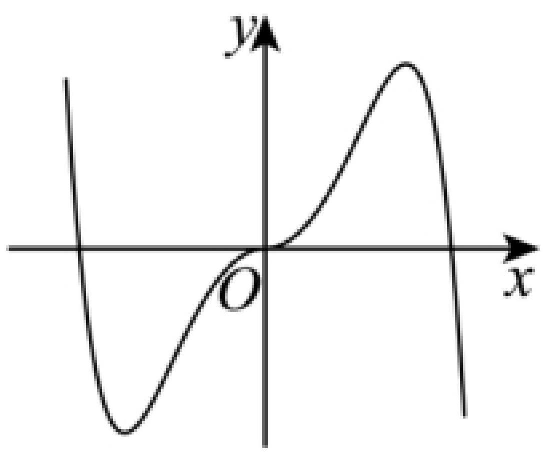
故切线的横截距为$\frac{1}{3}$，纵截距为-1，故切线与坐标轴围成的面积为$\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

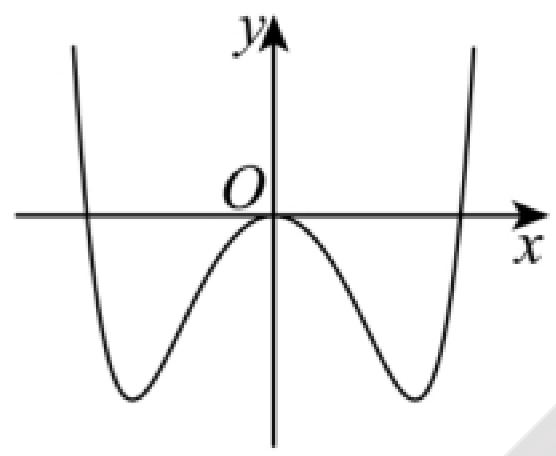
故选：A.

8. 函数 $f\left(x\right)=-x^2+\left(e^x-e^{-x}\right)\sin x$ 在区间 $[-2.8,2.8]$ 的大致图像为（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】B

【分析】利用函数的奇偶性可排除 A、C，代入 $x=1$ 可得 $f\left(1\right)>0$，可排除 D.

【详解】$f\left(-x\right)=-x^2+\left(e^{-x}-e^x\right)\sin\left(-x\right)=-x^2+\left(e^x-e^{-x}\right)\sin x=f\left(x\right)$，

又函数定义域为 $\left[-2.8,2.8\right]$，故该函数为偶函数，可排除 A、C，

又 $f\left(1\right)=-1+\left(e-\dfrac{1}{e}\right)\sin 1>-1+\left(e-\dfrac{1}{e}\right)\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{e}{2}-1-\dfrac{1}{2e}>\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2e}>0$，

故可排除 D.

故选：B.

9. 已知 $\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\sqrt{3}$，则 $\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=$（　　）

A. $2\sqrt{3}+1$　　B. $2\sqrt{3}-1$　　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $1-\sqrt{3}$

【答案】B

【分析】先将 $\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$ 弦化切求得 $\tan\alpha$，再根据两角和的正切公式即可求解.

【详解】因为 $\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\sqrt{3}$，

所以 $\dfrac{1}{1-\tan\alpha}=\sqrt{3}$，$\Rightarrow \tan\alpha=1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

所以 $\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}=2\sqrt{3}-1$，故选：B.

10. 无

11. 设α、β是两个平面，m、n是两条直线，且$\alpha \cap \beta = m$.下列四个命题：

①若$m//n$，则$n//\alpha$或$n//\beta$　　②若$m \perp n$，则$n \perp \alpha, n \perp \beta$

③若$n//\alpha$，且$n//\beta$，则$m//n$　　④若n与α和β所成的角相等，则$m \perp n$

其中所有真命题的编号是（　　）

A. ①③　　B. ②④　　C. ①②③　　D. ①③④

【答案】A

【解析】

【分析】根据线面平行的判定定理即可判断①；举反例即可判断②④；根据线面平行的性质即可判断③.

【详解】对①，当$n \subset \alpha$，因为$m//n$，$m \subset \beta$，则$n//\beta$，

当$n \subset \beta$，因为$m//n$，$m \subset \alpha$，则$n//\alpha$，

当n既不在α也不在β内，因为$m//n$，$m \subset \alpha, m \subset \beta$，则$n//\alpha$且$n//\beta$，故①正确；

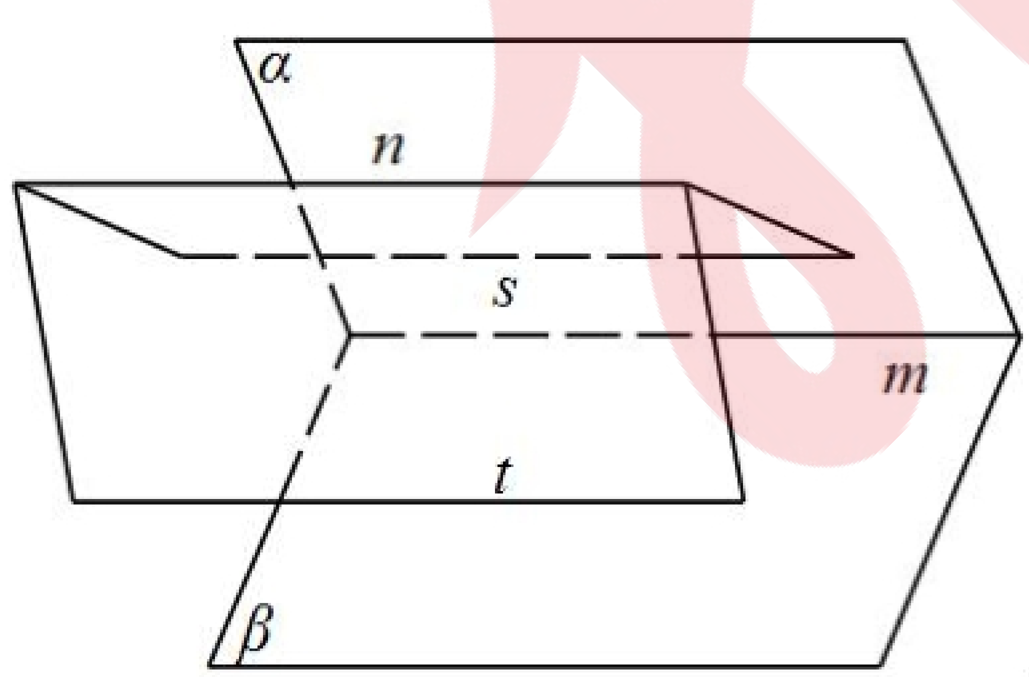
对②，若$m \perp n$，则n与α, β不一定垂直，故②错误；

对③，过直线n分别作两平面与α, β分别相交于直线s和直线t，

因为$n//\alpha$，过直线n的平面与平面α的交线为直线s，则根据线面平行的性质定理知$n//s$，

同理可得$n//t$，则$s//t$，因为$s \not\subset$平面β，$t \subset$平面β，则$s//$平面β，

因为$s \subset$平面α，$\alpha \cap \beta = m$，则$s//m$，又因为$n//s$，则$m//n$，故③正确；



对④，若$\alpha \cap \beta = m, n$与α和β所成的角相等，如果$n//\alpha, n//\beta$，则$m//n$，故④错误；

综上只有①③正确，

故选：A.

12. 在 $\triangle ABC$ 中内角 A,B,C 所对边分别为 a,b,c，若 $B=\frac{\pi}{3}$，$b^2=\frac{9}{4}ac$，则 $\sin A+\sin C=$（　　）

A. $\frac{3}{2}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\frac{\sqrt{7}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】C

【分析】利用正弦定理得 $\sin A\sin C=\frac{1}{3}$，再利用余弦定理有 $a^2+c^2=\frac{13}{4}ac$，再利用正弦定理得到 $\sin^2 A+\sin^2 C$ 的值，最后代入计算即可.

【详解】因为 $B=\frac{\pi}{3},b^2=\frac{9}{4}ac$，则由正弦定理得 $\sin A\sin C=\frac{4}{9}\sin^2 B=\frac{1}{3}$.

由余弦定理可得: $b^2=a^2+c^2-ac=\frac{9}{4}ac$，

即: $a^2+c^2=\frac{13}{4}ac$，根据正弦定理得 $\sin^2 A+\sin^2 C=\frac{13}{4}\sin A\sin C=\frac{13}{12}$，

所以 $(\sin A+\sin C)^2=\sin^2 A+\sin^2 C+2\sin A\sin C=\frac{7}{4}$，

因为 A,C 为三角形内角，则 $\sin A+\sin C>0$，则 $\sin A+\sin C=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

故选：C.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13.无

14. 函数 $f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上的最大值是______.

【答案】2

【解析】

【分析】结合辅助角公式化简成正弦型函数，再求给定区间最值即可.

【详解】$f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$，当 $x\in[0,\pi]$ 时，$x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$，

当 $x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$ 时，即 $x=\frac{5\pi}{6}$ 时，$f(x)_{\max}=2$.

故答案为：2

15. 已知 $a>1$， $\frac{1}{\log_8 a}-\frac{1}{\log_a 4}=-\frac{5}{2}$， 则 $a=$______.

【答案】64

【解析】

【分析】将 $\log_8 a,\log_a 4$ 利用换底公式转化成 $\log_2 a$ 来表示即可求解.

【详解】由题 $\frac{1}{\log_8 a}-\frac{1}{\log_a 4}=\frac{3}{\log_2 a}-\frac{1}{2}\log_2 a=-\frac{5}{2}$， 整理得 $\left(\log_2 a\right)^2-5\log_2 a-6=0$，

$\Rightarrow \log_2 a=-1$ 或 $\log_2 a=6$， 又 $a>1$，

所以 $\log_2 a=6=\log_2 2^6$， 故 $a=2^6=64$

故答案为：64.

16. 曲线 $y=x^3-3x$ 与 $y=-\left(x-1\right)^2+a$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上有两个不同的交点，则 a 的取值范围为______.

【答案】$\left(-2,1\right)$

【解析】

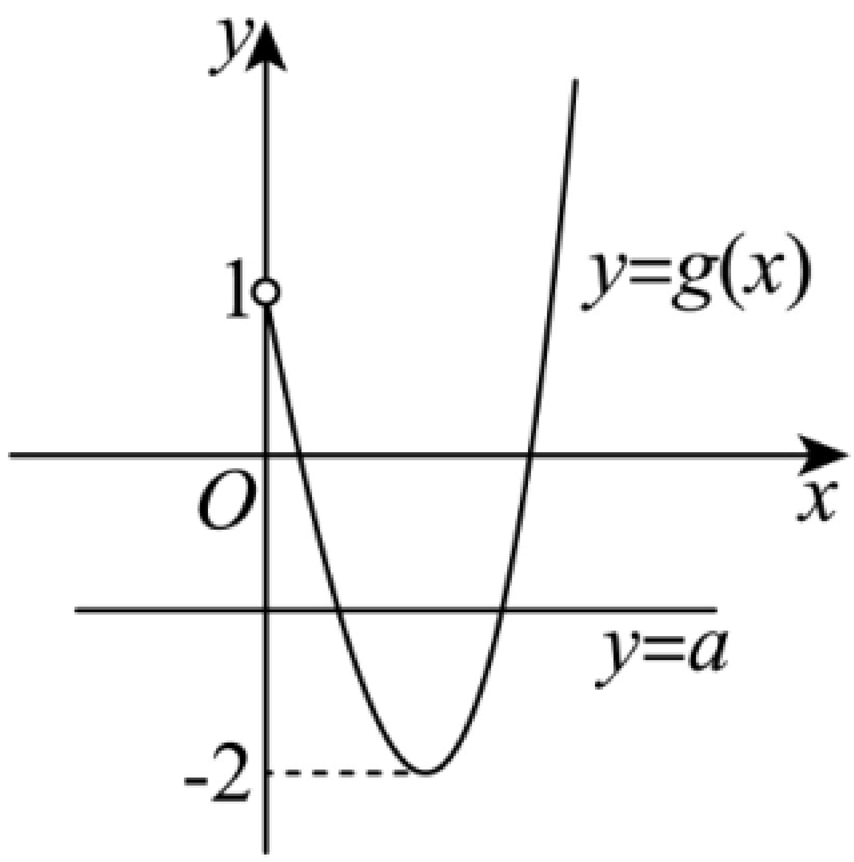
【分析】将函数转化为方程，令 $x^3-3x=-\left(x-1\right)^2+a$， 分离参数 a， 构造新函数 $g\left(x\right)=x^3+x^2-5x+1$, 结合导数求得 $g\left(x\right)$ 单调区间，画出大致图形数形结合即可求解.

【详解】令 $x^3-3x=-\left(x-1\right)^2+a$， 即 $a=x^3+x^2-5x+1$， 令 $g\left(x\right)=x^3+x^2-5x+1\left(x>0\right)$,

则 $g'\left(x\right)=3x^2+2x-5=\left(3x+5\right)\left(x-1\right)$， 令 $g'\left(x\right)=0\left(x>0\right)$ 得 $x=1$，

当 $x\in\left(0,1\right)$ 时， $g'\left(x\right)<0$， $g\left(x\right)$ 单调递减，

当 $x\in\left(1,+\infty\right)$ 时， $g'\left(x\right)>0$， $g\left(x\right)$ 单调递增， $g\left(0\right)=1,g\left(1\right)=-2$，



因为曲线 $y=x^3-3x$ 与 $y=-\left(x-1\right)^2+a$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上有两个不同的交点，

所以等价于 $y=a$ 与 $g\left(x\right)$ 有两个交点，所以 $a\in\left(-2,1\right)$.

故答案为： $\left(-2,1\right)$

三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．第 17 题第 21 题为必考题，每个考题考生必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：共 60 分．

17. 已知等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$2S_n=3a_{n+1}-3$．

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）求数列$\{S_n\}$的通项公式.

【答案】（1）$a_n=\left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}$

（2）$\frac{3}{2}\left(\frac{5}{3}\right)^n-\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】（1）利用退位法可求公比，再求出首项后可求通项；

（2）利用等比数列的求和公式可求S_n.

【小问 1 详解】

因为$2S_n=3a_{n+1}-3$,故$2S_{n-1}=3a_n-3$，

所以$2a_n=3a_{n+1}-3a_n\left(n\geq 2\right)$即$5a_n=3a_{n+1}$故等比数列的公比为$q=\frac{5}{3}$，

故$2a_1=3a_2-3=3a_1\times\frac{5}{3}-3=5a_1-3$，故$a_1=1$，故$a_n=\left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}$.

【小问 2 详解】

由等比数列求和公式得$S_n=\frac{1\times\left[1-\left(\frac{5}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{5}{3}}=\frac{3}{2}\left(\frac{5}{3}\right)^n-\frac{3}{2}$.

18. 某工厂进行生产线智能化升级改造，升级改造后，从该工厂甲、乙两个车间的产品中随机抽取 150 件进行检验，数据如下：

	优级品	合格品	不合格品	总计
甲车间	26	24	0	50
乙车间	70	28	2	100
总计	96	52	2	150

（1）填写如下列联表：

	优级品	非优级品
甲车间		
乙车间		

能否有95%的把握认为甲、乙两车间产品的优级品率存在差异？能否有99%的把握认为甲，乙两车间产品的优级品率存在差异？

（2）已知升级改造前该工厂产品的优级品率 $p=0.5$，设 $\overline{p}$ 为升级改造后抽取的 n 件产品的优级品率.如果 $\overline{p}>p+1.65\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$，则认为该工厂产品的优级品率提高了，根据抽取的 150 件产品的数据，能否认为生产线智能化升级改造后，该工厂产品的优级品率提高了？（$\sqrt{150}\approx 12.247$）

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$P\left(K^2\geq k\right)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

【答案】（1）答案见详解

（2）答案见详解

【分析】（1）根据题中数据完善列联表，计算 K^2，并与临界值对比分析；

（2）用频率估计概率可得 $\overline{p}=0.64$，根据题意计算 $p+1.65\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$，结合题意分析判断.

【小问 1 详解】

根据题意可得列联表：

	优级品	非优级品
甲车间	26	24
乙车间	70	30

可得 $K^2=\frac{150\left(26\times30-24\times70\right)^2}{50\times100\times96\times54}=\frac{75}{16}=4.6875$，

因为 $3.841<4.6875<6.635$，

所以有 95% 的把握认为甲、乙两车间产品的优级品率存在差异，没有 99% 的把握认为甲，乙两车间产品的优级品率存在差异.

【小问 2 详解】

由题意可知：生产线智能化升级改造后，该工厂产品的优级品的频率为 $\frac{96}{150}=0.64$，

用频率估计概率可得 $\overline{p}=0.64$，

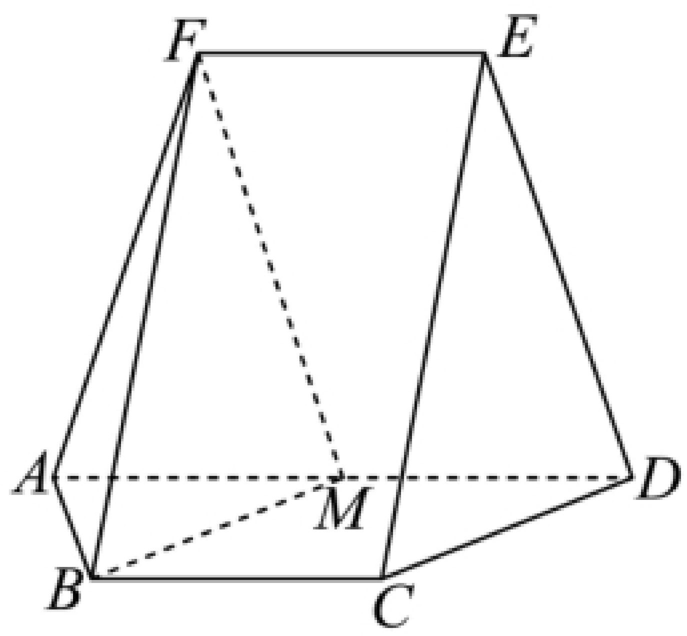
又因为升级改造前该工厂产品的优级品率 $p=0.5$，

则 $p+1.65\sqrt{\frac{p\left(1-p\right)}{n}}=0.5+1.65\sqrt{\frac{0.5\left(1-0.5\right)}{150}}\approx0.5+1.65\times\frac{0.5}{12.247}\approx0.568$，

可知 $\overline{p}>p+1.65\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$，

所以可以认为生产线智能化升级改造后，该工厂产品的优级品率提高了.

19. 如图，在以 A，B，C，D，E，F 为顶点的五面体中，四边形 $ABCD$ 与四边形 $ADEF$ 均为等腰梯形，$BC//AD, EF//AD$，$AD=4, AB=BC=EF=2$，$ED=\sqrt{10}, FB=2\sqrt{3}$，$M$ 为 AD 的中点.



（1）证明：$BM//$ 平面 CDE；

（2）求点 M 到 ABF 的距离.

【答案】（1）证明见详解；

（2）$\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$

【解析】

【分析】（1）结合已知易证四边形 $BCDM$ 为平行四边形，可证 $BM//CD$，进而得证；

（2）作 $FO\perp AD$，连接 OB，易证 OB, OD, OF 三垂直，结合等体积法 $V_{M-ABF}=V_{F-ABM}$ 即可求解.

【小问 1 详解】

因为 $BC//AD, BC=2, AD=4, M$ 为 AD 的中点，所以 $BC//MD, BC=MD$，

四边形 $BCDM$ 为平行四边形，所以 $BM//CD$，

又因为 $BM\not\subset$ 平面 CDE，$CD\subset$ 平面 CDE，所以 $BM//$ 平面 CDE；

【小问 2 详解】

如图所示，作 $BO\perp AD$ 交 AD 于 O，连接 OF，因为四边形 $ABCD$ 为等腰梯形，$BC//AD, AD=4,$ $AB=BC=2$，所以 $CD=2$，

结合（1）$BCDM$ 为平行四边形，可得 $BM=CD=2$，

又 $AM=2$，所以 $\triangle ABM$ 为等边三角形，O 为 AM 中点，所以 $OB=\sqrt{3}$，

又因为四边形 $ADEF$ 为等腰梯形，M 为 AD 中点，所以 $EF=MD, EF//MD$，

四边形 $EFMD$ 为平行四边形，$FM=ED=AF$，所以 $\triangle AFM$ 为等腰三角形，

$\triangle ABM$ 与 $\triangle AFM$ 底边上中点 O 重合，$OF\perp AM$，$OF=\sqrt{AF^2-AO^2}=3$，

因为 $OB^2+OF^2=BF^2$，所以 $OB\perp OF$，所以 OB, OD, OF 互相垂直，

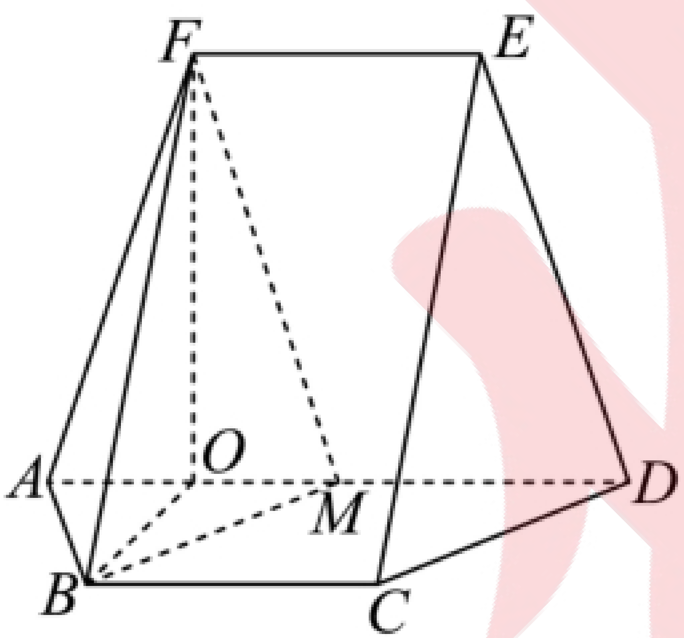
由等体积法可得$V_{M-ABF}=V_{F-ABM}$，$V_{F-ABM}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}S_{\triangle ABM}\cdot FO=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2^2\cdot 3=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$$\cos\angle FAB=\frac{FA^2+AB^2-FB^2}{2FA\cdot AB}=\frac{\left(\sqrt{10}\right)^2+2^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2}{2\cdot\sqrt{10}\cdot 2}=\frac{1}{2\sqrt{10}},\sin\angle FAB=\frac{\sqrt{39}}{2\sqrt{10}},$$

$$S_{\triangle FAB}=\frac{1}{2}FA\cdot AB\cdot\sin\angle FAB=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{10}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{39}}{2\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{39}}{2},$$

设点M到FAB的距离为d，则$V_{M-FAB}=V_{F-ABM}=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle FAB}\cdot d=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{39}}{2}\cdot d=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

解得$d=\frac{3\sqrt{13}}{13}$，即点M到ABF的距离为$\frac{3\sqrt{13}}{13}$.



20. 已知函数 $f\left(x\right)=a\left(x-1\right)-\ln x+1$.

（1）求 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

（2）若 $a\le 2$ 时，证明：当 $x>1$ 时，$f\left(x\right)<\mathrm{e}^{x-1}$ 恒成立.

【答案】（1）见解析　　（2）见解析

【解析】

【分析】（1）求导，含参分类讨论得出导函数的符号，从而得出原函数的单调性；

（2）先根据题设条件将问题可转化成证明当 $x>1$ 时，$\mathrm{e}^{x-1}-2x+1+\ln x>0$ 即可.

【小问 1 详解】

$f(x)$ 定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=a-\dfrac{1}{x}=\dfrac{ax-1}{x}$

当 $a\le 0$ 时，$f'(x)=\dfrac{ax-1}{x}<0$，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；

当 $a>0$ 时，$x\in\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减.

综上所述，当 $a\le 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；

$a>0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$ 上单调递减.

【小问 2 详解】

$a\le 2$，且 $x>1$ 时，$\mathrm{e}^{x-1}-f(x)=\mathrm{e}^{x-1}-a(x-1)+\ln x-1\ge \mathrm{e}^{x-1}-2x+1+\ln x$，

令 $g(x)=\mathrm{e}^{x-1}-2x+1+\ln x(x>1)$，下证 $g(x)>0$ 即可.

$g'(x)=\mathrm{e}^{x-1}-2+\dfrac{1}{x}$，再令 $h(x)=g'(x)$，则 $h'(x)=\mathrm{e}^{x-1}-\dfrac{1}{x^2}$，

显然 $h'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上递增，则 $h'(x)>h'(1)=\mathrm{e}^0-1=0$，

即 $g'(x)=h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上递增，

故 $g'(x)>g'(1)=\mathrm{e}^0-2+1=0$，即 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

故 $g(x)>g(1)=\mathrm{e}^0-2+1+\ln 1=0$，问题得证

21. 设椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 F，点 $M\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$ 在 C 上，且 $MF\perp x$ 轴.

（1）求 C 的方程；

（2）过点 $P(4,0)$ 的直线与 C 交于 A,B 两点，N 为线段 FP 的中点，直线 NB 交直线 MF 于点 Q，证明：$AQ\perp y$ 轴.

【答案】（1）$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$

（2）证明见解析

【解析】

【分析】（1）设 $F(c,0)$，根据 M 的坐标及 $MF\perp x$ 轴可求基本量，故可求椭圆方程.

（2）设 $AB:y=k(x-4)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，联立直线方程和椭圆方程，用 A,B 的坐标表示 y_1-y_Q，结合韦达定理化简前者可得 $y_1-y_Q=0$，故可证 $AQ\perp y$ 轴.

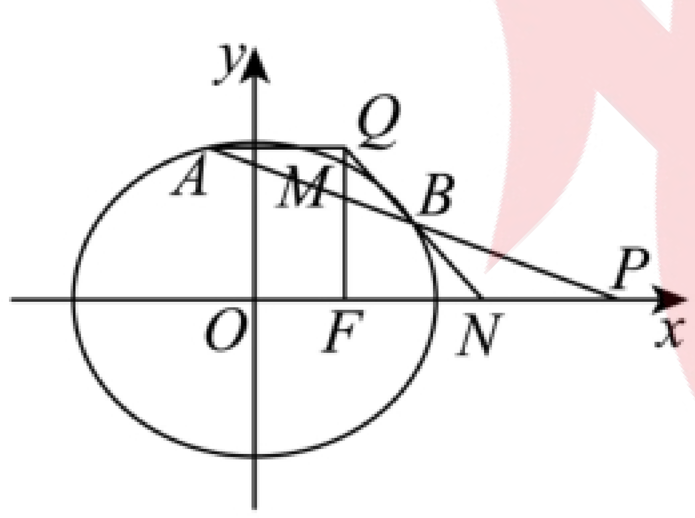
【小问 1 详解】

设 $F(c,0)$，由题设有 $c=1$ 且 $\dfrac{b^2}{a}=\dfrac{3}{2}$，故 $\dfrac{a^2-1}{a}=\dfrac{3}{2}$，故 $a=2$，故 $b=\sqrt{3}$，

故椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

【小问 2 详解】

直线 AB 的斜率必定存在，设 $AB:y=k(x-4)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，



由 $\begin{cases}3x^2+4y^2=12\\ y=k(x-4)\end{cases}$ 可得 $\left(3+4k^2\right)x^2-32k^2x+64k^2-12=0$，

故 $\Delta=1024k^4-4\left(3+4k^2\right)\left(64k^2-12\right)>0$，故 $-\dfrac{1}{2}<k<\dfrac{1}{2}$，

又 $x_1+x_2=\dfrac{32k^2}{3+4k^2},x_1x_2=\dfrac{64k^2-12}{3+4k^2}$，

而 $N\left(\frac{5}{2},0\right)$，故直线 $BN: y=\frac{y_2}{x_2-\frac{5}{2}}\left(x-\frac{5}{2}\right)$，故 $y_Q=\frac{-\frac{3}{2}y_2}{x_2-\frac{5}{2}}=\frac{-3y_2}{2x_2-5}$，

所以 $y_1-y_Q=y_1+\frac{3y_2}{2x_2-5}=\frac{y_1\times(2x_2-5)+3y_2}{2x_2-5}$

$$=\frac{k(x_1-4)\times(2x_2-5)+3k(x_2-4)}{2x_2-5}$$

$$=k\frac{2x_1x_2-5(x_1+x_2)+8}{2x_2-5}=k\frac{2\times\frac{64k^2-12}{3+4k^2}-5\times\frac{32k^2}{3+4k^2}+8}{2x_2-5}$$

$$=k\frac{\frac{128k^2-24-160k^2+24+32k^2}{3+4k^2}}{2x_2-5}=0,$$

故 $y_1=y_Q$，即 $AQ\perp y$ 轴.

【点睛】方法点睛：利用韦达定理法解决直线与圆锥曲线相交问题的基本步骤如下：

（1）设直线方程，设交点坐标为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$；

（2）联立直线与圆锥曲线的方程，得到关于 x（或 y）的一元二次方程，注意 Δ 的判断；

（3）列出韦达定理；

（4）将所求问题或题中的关系转化为 x_1+x_2、x_1x_2（或 y_1+y_2、y_1y_2）的形式；

（5）代入韦达定理求解.

（二）选考题：共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题作答，并用 2B 铅笔将所选题号涂黑，多涂、错涂、漏涂均不给分，如果多做，则按所做的第一题计分．

22. 在平面直角坐标系 xOy 中，以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=\rho\cos\theta+1$.

（1）写出 C 的直角坐标方程；

（2）设直线 l：$\begin{cases}x=t\\y=t+a\end{cases}$（$t$ 为参数），若 C 与 l 相交于 A,B 两点，若 $|AB|=2$，求 a 的值.

【答案】（1）$y^2=2x+1$

（2）$a=\frac{3}{4}$

【解析】

【分析】（1）根据 $\begin{cases}\rho=\sqrt{x^2+y^2}\\\rho\cos\theta=x\end{cases}$ 可得 C 的直角方程.

（2）将直线的新的参数方程代入 C 的直角方程，

法 1：结合参数 s 的几何意义可得关于 a 的方程，从而可求参数 a 的值；

法 2：将直线的直角方程与曲线的直角方程联立，结合弦长公式可求 a 的值.

【小问 1 详解】

由 $\rho=\rho\cos\theta+1$，将 $\begin{cases}\rho=\sqrt{x^2+y^2}\\\rho\cos\theta=x\end{cases}$ 代入 $\rho=\rho\cos\theta+1$，

故可得 $\sqrt{x^2+y^2}=x+1$，两边平方后可得曲线的直角坐标方程为 $y^2=2x+1$.

【小问 2 详解】

对于直线 l 的参数方程消去参数 t，得直线的普通方程为 $y=x+a$.

法 1：直线 l 的斜率为 1，故倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$，

故直线的参数方程可设为 $\begin{cases}x=\frac{\sqrt{2}}{2}s\\y=a+\frac{\sqrt{2}}{2}s\end{cases}$，$s\in\mathbf{R}$.

将其代入 $y^2=2x+1$ 中得 $s^2+2\sqrt{2}(a-1)s+2\left(a^2-1\right)=0$

设 A,B 两点对应的参数分别为 s_1,s_2，则 $s_1+s_2=-2\sqrt{2}\left(a-1\right),s_1s_2=2\left(a^2-1\right)$，

且 $\Delta=8(a-1)^2-8(a^2-1)=16-16a>0$，故 $a<1$，

$\therefore |AB|=|s_1-s_2|=\sqrt{(s_1+s_2)^2-4s_1s_2}=\sqrt{8(a-1)^2-8(a^2-1)}=2$，解得 $a=\dfrac{3}{4}$.

法 2：联立 $\begin{cases} y=x+a \\ y^2=2x+1 \end{cases}$，得 $x^2+(2a-2)x+a^2-1=0$，

$\Delta=(2a-2)^2-4(a^2-1)=-8a+8>0$，解得 $a<1$，

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),\therefore x_1+x_2=2-2a,x_1x_2=a^2-1$，

则 $|AB|=\sqrt{1+1^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{(2-2a)^2-4(a^2-1)}=2$，

解得 $a=\dfrac{3}{4}$

23. 实数a,b满足$a+b\geq 3$.

（1）证明：$2a^2+2b^2>a+b$；

（2）证明：$\left|a-2b^2\right|+\left|b-2a^2\right|\geq 6$.

【答案】（1）证明见解析

（2）证明见解析

【解析】

【分析】（1）直接利用$2a^2+2b^2\geq(a+b)^2$即可证明.

（2）根据绝对值不等式并结合（1）中结论即可证明.

【小问1详解】

因为$2a^2+2b^2-\left(a+b\right)^2=a^2-2ab+b^2=\left(a-b\right)^2\geq 0$，

当$a=b$时等号成立，则$2a^2+2b^2\geq(a+b)^2$，

因为$a+b\geq 3$，所以$2a^2+2b^2\geq(a+b)^2>a+b$；

【小问2详解】

$$\left|a-2b^2\right|+\left|b-2a^2\right|\geq\left|a-2b^2+b-2a^2\right|=\left|2a^2+2b^2-(a+b)\right|$$

$$=2a^2+2b^2-(a+b)\geq(a+b)^2-(a+b)=(a+b)(a+b-1)\geq 3\times 2=6$$