

绝密★启用前

2024 年普通高等学校招生全国统一考试

全国甲卷文科数学

使用范围：陕西、宁夏、青海、内蒙古、四川

注意事项：

1. 答题前，务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上。
2. 答选择题时，必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦擦干净后，再选涂其它答案标号。
3. 答非选择题时，必须使用 0.5 毫米黑色签字笔，将答案书写在答题卡规定的位置上。
4. 所有题目必须在答题卡上作答，在试题卷上答题无效。
5. 考试结束后，只将答题卡交回。

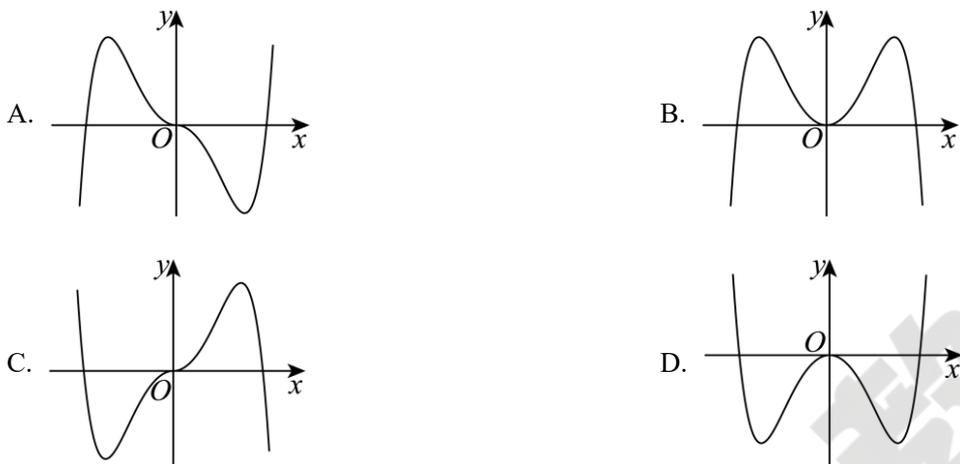
一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 9\}$, $B = \{x | x+1 \in A\}$, 则 $A \cap B =$ ()
A. $\{1, 2, 3, 4\}$ B. $\{1, 2, 3\}$ C. $\{3, 4\}$ D. $\{1, 2, 9\}$
2. 设 $z = \sqrt{2}i$, 则 $z \cdot \bar{z} =$ ()
A. $-i$ B. 1 C. -1 D. 2
3. 若实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 4x - 3y - 3 \geq 0 \\ x - 2y - 2 \leq 0 \\ 2x + 6y - 9 \leq 0 \end{cases}$, 则 $z = x - 5y$ 的最小值为 ()
A. 5 B. $\frac{1}{2}$ C. -2 D. $-\frac{7}{2}$
4. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_9 = 1$, $a_3 + a_7 =$ ()
A. -2 B. $\frac{7}{3}$ C. 1 D. $\frac{2}{9}$
5. 甲、乙、丙、丁四人排成一列，丙不在排头，且甲或乙在排尾的概率是 ()
A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$
6. 已知双曲线的两个焦点分别为 $(0, 4), (0, -4)$, 点 $(-6, 4)$ 在该双曲线上，则该双曲线的离心率为 ()
A. 4 B. 3 C. 2 D. $\sqrt{2}$

7. 曲线 $f(x) = x^6 + 3x - 1$ 在 $(0, -1)$ 处的切线与坐标轴围成的面积为 ()

- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. 函数 $f(x) = -x^2 + (e^x - e^{-x})\sin x$ 在区间 $[-2.8, 2.8]$ 的大致图像为 ()



9. 已知 $\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \sqrt{3}$, 则 $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) =$ ()

- A. $2\sqrt{3} + 1$ B. $2\sqrt{3} - 1$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $1 - \sqrt{3}$

原 10 题略

11. 设 α, β 两个平面, m, n 是两条直线, 且 $\alpha \cap \beta = m$. 下列四个命题:

- ①若 $m \parallel n$, 则 $n \parallel \alpha$ 或 $n \parallel \beta$ ②若 $m \perp n$, 则 $n \perp \alpha, n \perp \beta$
 ③若 $n \parallel \alpha$, 且 $n \parallel \beta$, 则 $m \parallel n$ ④若 n 与 α 和 β 所成的角相等, 则 $m \perp n$

其中所有真命题的编号是 ()

- A. ①③ B. ②④ C. ①②③ D. ①③④

12. 在 $\triangle ABC$ 中内角 A, B, C 所对边分别为 a, b, c , 若 $B = \frac{\pi}{3}$, $b^2 = \frac{9}{4}ac$, 则 $\sin A + \sin C =$ ()

- A. $\frac{3}{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{\sqrt{7}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

原 13 题略

14. 函数 $f(x) = \sin x - \sqrt{3} \cos x$ 在 $[0, \pi]$ 上的最大值是_____.

15. 已知 $a > 1$, $\frac{1}{\log_8 a} - \frac{1}{\log_a 4} = -\frac{5}{2}$, 则 $a =$ _____.

16. 曲线 $y = x^3 - 3x$ 与 $y = -(x-1)^2 + a$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个不同的交点, 则 a 的取值范围为_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。第 17 题第 21 题为必考题，每个考题考生必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：共 60 分。

17. 某工厂进行生产线智能化升级改造，升级改造后，从该工厂甲、乙两个车间的产品中随机抽取 150 件进行检验，数据如下：

	优级品	合格品	不合格品	总计
甲车间	26	24	0	50
乙车间	70	28	2	100
总计	96	52	2	150

(1) 填写如下列联表：

	优级品	非优级品
甲车间		
乙车间		

能否有 95% 的把握认为甲、乙两车间产品的优级品率存在差异？能否有 99% 的把握认为甲、乙两车间产品的优级品率存在差异？

(2) 已知升级改造前该工厂产品的优级品率 $p = 0.5$, 设 \bar{p} 为升级改造后抽取的 n 件产品的优级品率. 如果 $\bar{p} > p + 1.65 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$, 则认为该工厂产品的优级品率提高了, 根据抽取的 150 件产品的数据, 能否认

为生产线智能化升级改造后, 该工厂产品的优级品率提高了? ($\sqrt{150} \approx 12.247$)

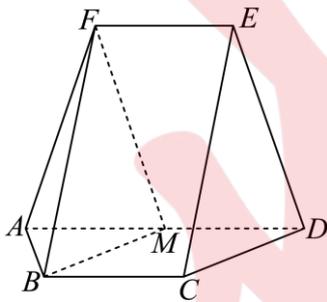
附: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

18. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $2S_n = 3a_{n+1} - 3$.

- (1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；
- (2) 求数列 $\{S_n\}$ 的通项公式.

19. 如图，在以 A, B, C, D, E, F 为顶点的五面体中，四边形 $ABCD$ 与四边形 $ADEF$ 均为等腰梯形， $BC \parallel AD, EF \parallel AD$ ， $AD = 4, AB = BC = EF = 2$ ， $ED = \sqrt{10}, FB = 2\sqrt{3}$ ， M 为 AD 的中点.



- (1) 证明： $BM \parallel$ 平面 CDE ；
- (2) 求点 M 到 ABF 的距离.

20. 已知函数 $f(x) = a(x-1) - \ln x + 1$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若 $a \leq 2$ 时, 证明: 当 $x > 1$ 时, $f(x) < e^{x-1}$ 恒成立.

21. 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 F , 点 $M\left(1, \frac{3}{2}\right)$ 在 C 上, 且 $MF \perp x$ 轴.

(1) 求 C 的方程;

(2) 过点 $P(4, 0)$ 的直线与 C 交于 A, B 两点, N 为线段 FP 的中点, 直线 NB 交直线 MF 于点 Q , 证明: $AQ \perp y$ 轴.

(二) 选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答，并用 2B 铅笔将所选题号涂黑，多涂、错涂、漏涂均不给分，如果多做，则按所做的第一题计分。

22. 在平面直角坐标系 xOy 中，以坐标原点 O 为极点， x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = \rho \cos \theta + 1$.

(1) 写出 C 直角坐标方程；

(2) 设直线 $l: \begin{cases} x=t \\ y=t+a \end{cases}$ (t 为参数)，若 C 与 l 相交于 A, B 两点，若 $|AB|=2$ ，求 a 的值.

23. 实数 a, b 满足 $a+b \geq 3$.

(1) 证明： $2a^2 + 2b^2 > a + b$ ；

(2) 证明： $|a - 2b^2| + |b - 2a^2| \geq 6$.