

绝密★本科目考试启用前

## 2024年普通高等学校招生全国统一考试（北京卷）

## 数学

本试卷共12页，150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

## 第一部分（选择题 共40分）

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合  $M = \{x | -4 < x \leq 1\}$ ,  $N = \{x | -1 < x < 3\}$ , 则  $M \cup N =$  ( )
- A.  $\{x | -4 < x < 3\}$                       B.  $\{x | -1 < x \leq 1\}$
- C.  $\{0, 1, 2\}$                               D.  $\{x | -1 < x < 4\}$
2. 已知  $\frac{z}{i} = i - 1$ , 则  $z =$  ( )
- A.  $1 - i$                                   B.  $-i$                                   C.  $-1 - i$                               D.  $1$
3. 求圆  $x^2 + y^2 - 2x + 6y = 0$  圆心到  $x - y + 2 = 0$  的距离 ( )
- A.  $2\sqrt{3}$                                   B.  $2$                                       C.  $3\sqrt{2}$                               D.  $\sqrt{6}$
4.  $(x - \sqrt{x})^4$  的二项展开式中  $x^3$  的系数为 ( )
- A.  $15$                                       B.  $6$                                       C.  $-4$                                       D.  $-13$
5. 已知向量  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ , 则“ $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = 0$ ”是“ $\vec{a} = \vec{b}$  或  $\vec{a} = -\vec{b}$ ”的 ( ) 条件.
- A. 必要而不充分条件                      B. 充分而不必要条件
- C. 充分且必要条件                        D. 既不充分也不必要条件
6. 已知  $f(x) = \sin \omega x (\omega > 0)$ ,  $f(x_1) = -1$ ,  $f(x_2) = 1$ ,  $|x_1 - x_2|_{\min} = \frac{\pi}{2}$ , 则  $\omega =$  ( )
- A.  $1$                                       B.  $2$                                       C.  $3$                                       D.  $4$
7. 记水的质量为  $d = \frac{S-1}{\ln n}$ , 并且  $d$  越大, 水质量越好. 若  $S$  不变, 且  $d_1 = 2.1$ ,  $d_2 = 2.2$ , 则  $n_1$  与  $n_2$  的关系为 ( )
- A.  $n_1 < n_2$
- B.  $n_1 > n_2$

- C. 若  $S < 1$ , 则  $n_1 < n_2$ ; 若  $S > 1$ , 则  $n_1 > n_2$ ;
- D. 若  $S < 1$ , 则  $n_1 > n_2$ ; 若  $S > 1$ , 则  $n_1 < n_2$ ;
8. 已知以边长为 4 的正方形为底面的四棱锥, 四条侧棱分别为 4, 4,  $2\sqrt{2}$ ,  $2\sqrt{2}$ , 则该四棱锥的高为 ( )
- A.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       B.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       C.  $2\sqrt{3}$       D.  $\sqrt{3}$
9. 已知  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  是函数  $y = 2^x$  图象上不同的两点, 则下列正确的是 ( )
- A.  $\log_2 \frac{y_1 + y_2}{2} > \frac{x_1 + x_2}{2}$       B.  $\log_2 \frac{y_1 + y_2}{2} < \frac{x_1 + x_2}{2}$
- C.  $\log_2 \frac{y_1 + y_2}{2} > x_1 + x_2$       D.  $\log_2 \frac{y_1 + y_2}{2} < x_1 + x_2$
10. 若集合  $\{(x, y) | y = x + t(x^2 - x), 0 \leq t \leq 1, 1 \leq x \leq 2\}$  表示 图形中, 两点间最大距离为  $d$ 、面积为  $S$ , 则 ( )
- A.  $d = 3, S < 1$       B.  $d = 3, S > 1$
- C.  $d = \sqrt{10}, S < 1$       D.  $d = \sqrt{10}, S > 1$

### 第二部分 (非选择题 共 110 分)

#### 二、填空题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分.

11. 已知抛物线  $y^2 = 16x$ , 则焦点坐标为\_\_\_\_\_.
12. 已知  $\alpha \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ , 且  $\alpha$  与  $\beta$  终边关于原点对称, 则  $\cos \beta$  的最大值为\_\_\_\_\_.
13. 已知双曲线  $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ , 则过  $(3, 0)$  且和双曲线只有一个交点的直线的斜率为\_\_\_\_\_.
14. 已知三个圆柱的体积为公比为 10 的等比数列. 第一个圆柱的直径为 65mm, 第二、三个圆柱的直径为 325mm, 第三个圆柱的高为 230mm, 求前两个圆柱的高度分别为\_\_\_\_\_.
15. 已知  $M = \{k | a_k = b_k\}$ ,  $a_n, b_n$  不为常数且各项均不相同, 下列正确的是\_\_\_\_\_.
- ①  $a_n, b_n$  均为等差数列, 则  $M$  中最多一个元素;
- ②  $a_n, b_n$  均为等比数列, 则  $M$  中最多三个元素;
- ③  $a_n$  为等差数列,  $b_n$  为等比数列, 则  $M$  中最多三个元素;

④  $a_n$  单调递增,  $b_n$  单调递减, 则  $M$  中最多一个元素.

三、解答题共 6 小题, 共 85 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

16. 在  $\triangle ABC$  中,  $a = 7$ ,  $A$  为钝角,  $\sin 2B = \frac{\sqrt{3}}{7} b \cos B$ .

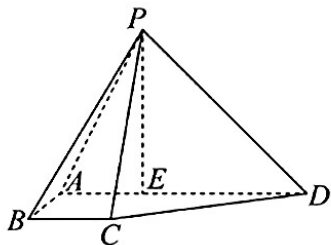
(1) 求  $\angle A$ ;

(2) 从条件①、条件②和条件③这三个条件中选择一个作为已知, 求  $\triangle ABC$  的面积.

①  $b = 7$ ; ②  $\cos B = \frac{13}{14}$ ; ③  $c \sin A = \frac{5}{2} \sqrt{3}$ .

注: 如果选择条件①、条件②和条件③分别解答, 按第一个解答计分.

17. 已知四棱锥  $P-ABCD$ ,  $AD \parallel BC$ ,  $AB = BC = 1$ ,  $AD = 3$ ,  $DE = PE = 2$ ,  $E$  是  $AD$  上一点,  $PE \perp AD$ .



(1) 若  $F$  是  $PE$  中点, 证明:  $BF \parallel$  平面  $PCD$ .

(2) 若  $AB \perp$  平面  $PED$ , 求平面  $PAB$  与平面  $PCD$  夹角的余弦值.

18. 已知某险种的保费为 0.4 万元, 前 3 次出险每次赔付 0.8 万元, 第 4 次赔付 0.6 万元

赔偿次数	0	1	2	3	4
单数	800	100	60	30	10

在总体中抽样 100 单, 以频率估计概率:

(1) 求随机抽取一单, 赔偿不少于 2 次的概率;

(2) (i) 毛利润是保费与赔偿金额之差. 设毛利润为  $X$ , 估计  $X$  的数学期望;

(ii) 若未赔偿过的保单下一保险期的保费下降 4%, 已赔偿过的增加 20%. 估计保单下一保险期毛利润的数学期望.

19. 已知椭圆方程  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ , 焦点和短轴端点构成边长为 2 的正方形, 过  $(0, t) (t > \sqrt{2})$

的直线  $l$  与椭圆交于  $A, B, C(0, 1)$ , 连接  $AC$  交椭圆于  $D$ .

(1) 求椭圆方程和离心率;

(2) 若直线  $BD$  斜率为 0, 求  $t$ .

20. 已知  $f(x) = x + k \ln(1+x)$  在  $(t, f(t)) (t > 0)$  处切线为  $l$ .

(1) 若切线  $l$  的斜率  $k = -1$ , 求  $f(x)$  单调区间;

(2) 证明: 切线  $l$  不经过  $(0, 0)$ ;

(3) 已知  $k = 1$ ,  $A(t, f(t))$ ,  $C(0, f(t))$ ,  $O(0, 0)$ , 其中  $t > 0$ , 切线  $l$  与  $y$  轴交于点  $B$  时. 当

$2S_{\triangle ACO} = 15S_{\triangle ABO}$ , 符合条件的  $A$  的个数为?

(参考数据:  $1.09 < \ln 3 < 1.10$ ,  $1.60 < \ln 5 < 1.61$ ,  $1.94 < \ln 7 < 1.95$ )

21. 设集合  $M = \{(i, j, s, t) | i \in \{1, 2\}, j \in \{3, 4\}, s \in \{5, 6\}, t \in \{7, 8\}, 2 | (i + j + s + t)\}$ . 对于给定有穷数列

$A: \{a_n\} (1 \leq n \leq 8)$ , 及序列  $\Omega: \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s$ ,  $\omega_k = (i_k, j_k, s_k, t_k) \in M$ , 定义变换  $T$ : 将数列  $A$  的第

$i_1, j_1, s_1, t_1$  项加 1, 得到数列  $T_1(A)$ ; 将数列  $T_1(A)$  的第  $i_2, j_2, s_2, t_2$  项加 1, 得到数列  $T_2 T_1(A) \dots$ ; 重复上述操

作, 得到数列  $T_s \dots T_2 T_1(A)$ , 记为  $\Omega(A)$ .

(1) 给定数列  $A: 1, 3, 2, 4, 6, 3, 1, 9$  和序列  $\Omega: (1, 3, 5, 7), (2, 4, 6, 8), (1, 3, 5, 7)$ , 写出  $\Omega(A)$ ;

(2) 是否存在序列  $\Omega$ , 使得  $\Omega(A)$  为  $a_1 + 2, a_2 + 6, a_3 + 4, a_4 + 2, a_5 + 8, a_6 + 2, a_7 + 4, a_8 + 4$ , 若存在, 写出一个符合条件的  $\Omega$ ; 若不存在, 请说明理由;

(3) 若数列  $A$  的各项均为正整数, 且  $a_1 + a_3 + a_5 + a_7$  为偶数, 证明: “存在序列  $\Omega$ , 使得  $\Omega(A)$  为常数列” 的充要条件为 “ $a_1 + a_2 = a_3 + a_4 = a_5 + a_6 = a_7 + a_8$ ”.

# 参考答案

绝密★本科目考试启用前

## 2024 年普通高等学校招生全国统一考试（北京卷）

### 数学

本试卷共 12 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

#### 第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1.A 2.C 3.C 4.B 5.A 6.B 7.C 8.D 9.A 10.C

#### 第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11. (4,0)

12.  $-\frac{1}{2}$  或  $-0.5$

13.  $\pm\frac{1}{2}$

14.  $\frac{115}{2}$  mm, 23mm

15. ①③④

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16. (1)  $A = \frac{2\pi}{3}$ ;

(2) 选择①无解；选择②和③  $\triangle ABC$  面积均为  $\frac{15\sqrt{3}}{4}$

17. (1) 证明见解析

(2)  $\frac{\sqrt{30}}{30}$

18. (1)  $\frac{1}{10}$

(2) (i) 0.122 万元 (ii) 0.1252 万元

19. (1)  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1, e = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(2)  $t = 2$

20. (1) 单调递减区间为  $(-1, 0)$ , 单调递增区间为  $(0, +\infty)$

(2) 证明见解析 (3) 2

21. (1)  $\Omega(A) : 3, 4, 4, 5, 8, 4, 3, 10$

(2) 不存在符合条件的  $\Omega$ , 理由见解析

(3) 证明见解析



锦宏教育  
Jinhong Education