2024 年普通高等学校招生全国统一考试

理 科 数 学

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂 黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答 题卡上, 写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只 有一项是符合题目要求的。

1. 若 $z=5+\mathrm{i}$, 则 $\mathrm{i}(\bar{z}+z)=$

A. $10\mathrm{i}$　　B. $2\mathrm{i}$　　C. 10　　D. 2

2. 已知集合 $A=\{1,2,3,4,5,9\}, B=\{x \mid \sqrt{x}\in A\}$, 则 $\complement_A(A\cap B)=$

A. $\{1,4,9\}$　　B. $\{3,4,9\}$　　C. $\{1,2,3\}$　　D. $\{2,3,5\}$

3. 若 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}4x-3y-3\geqslant 0,\\ x-2y-2\leqslant 0,\\ 2x+6y-9\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=x-5y$ 的最小值为

A. $\frac{1}{2}$　　B. 0　　C. $-\frac{5}{2}$　　D. $-\frac{7}{2}$

4. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 已知 $S_5=S_{10}, a_5=1$, 则 $a_1=$

A. $\frac{7}{2}$　　B. $\frac{7}{3}$　　C. $-\frac{1}{3}$　　D. $-\frac{7}{11}$

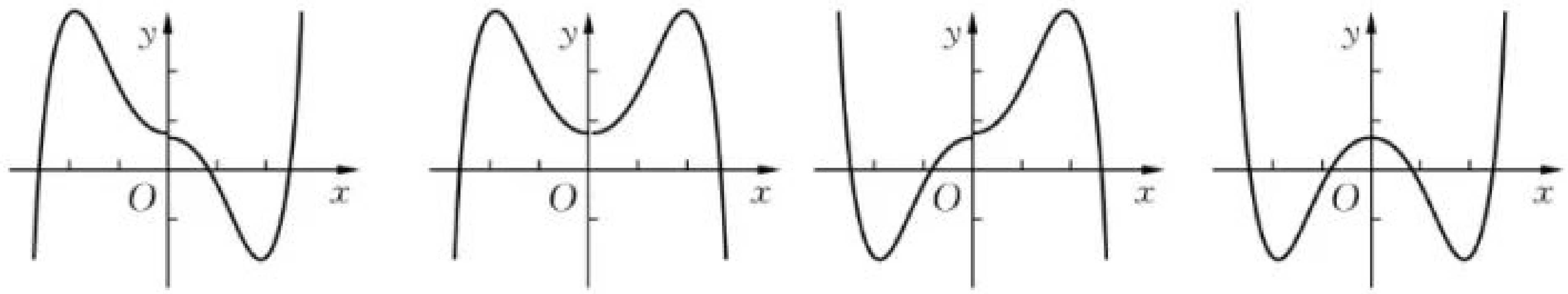
5. 已知双曲线的两个焦点分别为 $(0,4),(0,-4)$, 点 $(-6,4)$ 在该双曲线上, 则该双曲 线的离心率为

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. $\sqrt{2}$

6. 设函数 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x+2\sin x}{1+x^2}$, 则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的切线与两坐标轴所围成 的三角形的面积为

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

7. 函数 $y=-x^2+(e^x-e^{-x})\sin x$ 在区间 $[-2.8,2.8]$ 的图象大致为



A　　B　　C　　D

8. 已知 $\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\sqrt{3}$，则 $\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=$

A. $2\sqrt{3}+1$　　B. $2\sqrt{3}-1$　　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $1-\sqrt{3}$

9. 设向量 $a=(x+1,x)$，$b=(x,2)$，则

A. $x=-3$ 是 $a\perp b$ 的必要条件　　B. $x=-3$ 是 $a\parallel b$ 的必要条件

C. $x=0$ 是 $a\perp b$ 的充分条件　　D. $x=-1+\sqrt{3}$ 是 $a\parallel b$ 的充分条件

10. 设 α,β 为两个平面，m,n 为两条直线，且 $\alpha\cap\beta=m$．下述四个命题:

① 若 $m\parallel n$，则 $n\parallel\alpha$ 或 $n\parallel\beta$

②若 $m\perp n$，则 $n\perp\alpha$ 或 $n\perp\beta$

③ 若 $n\parallel\alpha$ 且 $n\parallel\beta$，则 $m\parallel n$

④若 n 与 α,β 所成的角相等，则 $m\perp n$

其中所有真命题的编号是

A. ①③　　B. ②④　　C. ①②③　　D. (1) ③④

11. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，已知 $B=60^\circ$，$b^2=\dfrac{9}{4}ac$，则 $\sin A+\sin C=$

A. $\dfrac{3}{2}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

12. 已知 b 是 a,c 的等差中项，直线 $ax+by+c=0$ 与圆 $x^2+y^2+4y-1=0$ 交于 A,B 两点，则 $|AB|$ 的最小值为

A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. $2\sqrt{5}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $\left(\dfrac{1}{3}+x\right)^{10}$ 的展开式中，各项系数中的最大值为 _ .

14. 已知圆台甲、乙的上底面半径均为 r_1，下底面半径均为 r_2，圆台的母线长分别为 $2(r_2-r_1)$，$3(r_2-r_1)$，则圆台甲与乙的体积之比为 ______.

15. 已知 $a>1$ 且 $\frac{1}{\log_8 a}-\frac{1}{\log_a 4}=-\frac{5}{2}$，则 $a=$ ______.

16. 有 6 个相同的球，分别标有数字 1,2,3,4,5,6，从中无放回地随机取 3 次，每次取 1 个球. 设 m 为前两次取出的球上数字的平均值，n 为取出的三个球上数字的平均值，则 m 与 n 之差的绝对值不大于 $\frac{1}{2}$ 的概率为 ______.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17－21 题为必考 题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：共 60 分。

17. (12 分)

某工厂进行生产线智能化升级改造. 升级改造后，从该工厂甲、乙两个车间的产品 中随机抽取 150 件进行检验，数据如下：

	优级品	合格品	不合格品	总计
甲车间	26	24	0	50
乙车间	70	28	2	100
总计	96	52	2	150

(1) 填写如下列联表：

	优级品	非优级品
甲车间		
乙车间		

能否有 95% 的把握认为甲、乙两车间产品的优级品率存在差异？能否有 99% 的把 握认为甲、乙两车间产品的估级品率存在差异？

(2) 已知升级改造前该工厂产品的优级品率 $p=0.5$. 设 $\bar{p}$ 为升级改造后抽取的 n 件 产品的优级品率. 如果 $\bar{p}>p+1.65\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$，则认为该工厂产品的优级品率提高了. 根据抽取的 150 件产品的数据，能否认为生产线智能化升级改造后，该工厂产品的优级 品率提高了？($\sqrt{150}\approx 12.247$)

附：$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，

$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

18. (12 分)

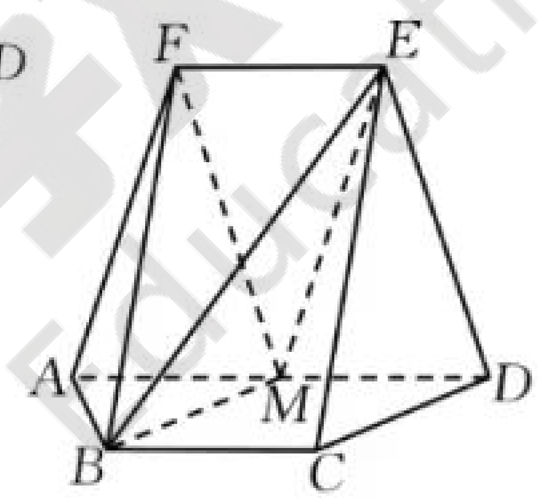
记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $4S_n=3a_n+4$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n=(-1)^{n-1}na_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. (12 分)

如图, 在以 A,B,C,D,E,F 为顶点的五面体中, 四边形 $ABCD$ 与四边形 $ADEF$ 均为等腰梯形, $EF \parallel AD, BC \parallel AD$, $AD=4, AB=BC=EF=2, ED=\sqrt{10}, FB=2\sqrt{3}, M$ 为 AD 的中点.



(1) 证明: $BM \parallel$ 平面 CDE ;

(2) 求二面角 $F-BM-E$ 的正弦值.

20. (12 分)

设椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 F , 点 $M\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$ 在 C 上, 且 $MF\perp x$ 轴.

(1) 求 C 的方程;

(2) 过点 $P(4,0)$ 的直线交 C 于 A,B 两点, N 为线段 FP 的中点, 直线 NB 交直线 MF 于点 Q . 证明: $AQ\perp y$ 轴.

21. (12 分)

已知函数 $f(x)=(1-ax)\ln(1+x)-x$.

(1) 若 $a=-2$, 求 $f(x)$ 的极值;

(2) 当 $x\geqslant 0$ 时, $f(x)\geqslant 0$, 求 a 的极值范围.

(二) 选考题: 共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做, 则按所做的第 一题计分。

22. [选修 4－4: 坐标系与参数方程] (10 分)

在直角坐标系 xOy 中, 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=\rho\cos\theta+1$.

(1) 写出 C 的直角坐标方程;

(2) 设直线 l:$\begin{cases}x=t,\\y=t+a\end{cases}$ (t 为参数), 若 C 与 l 相交于 A,B 两点, 且 $|AB|=2$, 求 a .

23. [选修 4－5: 不等式选讲] (10 分)

已知实数 a,b 满足 $a+b\geqslant 3$.

(1) 证明: $2a^2+2b^2>a+b$;

(2) 证明: $|a-2b^2|+|b-2a^2|\geqslant 6$.