

2024 年普通高等学校招生全国统一考试

全国甲卷文科数学

使用范围：陕西、宁夏、青海、内蒙古、四川

注意事项：

1. 答题前，务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上。
2. 答选择题时，必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦擦干净后，再选涂其它答案标号。
3. 答非选择题时，必须使用 0.5 毫米黑色签字笔，将答案书写在答题卡规定的位置上。
4. 所有题目必须在答题卡上作答，在试题卷上答题无效。
5. 考试结束后，只将答题卡交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 9\}$, $B = \{x | x+1 \in A\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$

- (A) $\{1, 2, 3, 4\}$ (B) $\{1, 2, 3, 4\}$ (C) $\{1, 2, 3, 4\}$ (D) $\{1, 2, 3, 4\}$

【参考答案】 A

【详细解析】 因为 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 9\}$, $B = \{x | x+1 \in A\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 8\}$, 所以 $A \cap B = \{1, 2, 3, 4\}$, 故选(A).

2. 设 $z = \sqrt{2}i$, 则 $z \cdot \bar{z} = (\quad)$

- (A) 2 (B) 2 (C) 2 (D) 2

【参考答案】 D

【详细解析】 因为 $z = \sqrt{2}i$, 所以 $z \cdot \bar{z} = 2$, 故选(D).

3. 若实数 x, y 满足约束条件(略), 则 $z = x - 5y$ 的最小值为(\quad)

- (A) 5 (B) $\frac{1}{2}$ (C) -2 (D) $-\frac{7}{2}$

【参考答案】 D

【详细解析】 将约束条件两两联立可得 3 个交点: $(0, -1)$ 、 $(\frac{3}{2}, 1)$ 和 $(3, \frac{1}{2})$, 经检验都符合约束条件. 代入目标函数可得: $z_{\min} = -\frac{7}{2}$, 故选(D).

4. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_9 = 1$, $a_3 + a_7 = (\quad)$

- (A) -2 (B) $\frac{7}{3}$ (C) 1 (D) $\frac{2}{9}$

【参考答案】 D

【详细解析】 令 $d=0$, 则 $S_9 = 9a_1 = 1$, $a_1 = \frac{1}{9}$, $a_3 + a_7 = \frac{2}{9}$, 故选(D).

5. 甲、乙、丙、丁四人排成一列, 丙不在排头, 且甲或乙在排尾的概率是(\quad)

- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{2}{3}$

【参考答案】 B

【参考答案】C

【详细解析】因为 $B = \frac{\pi}{3}$, $b^2 = \frac{9}{4}ac$, 所以 $\sin A \sin C = \frac{4}{9} \sin^2 B = \frac{1}{3}$. 由余弦定理可得: $b^2 = a^2 + c^2 - ac = \frac{9}{4}ac$, 即: $a^2 + c^2 = \frac{13}{4}ac$, $\sin^2 A + \sin^2 C = \frac{13}{4} \sin A \sin C = \frac{13}{12}$, 所以 $(\sin A + \sin C)^2 = \sin^2 A + \sin^2 C + 2 \sin A \sin C = \frac{7}{4}$, $\sin A + \sin C = \frac{\sqrt{7}}{2}$, 故选(C).

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 略

14. 函数 $f(x) = \sin x - \sqrt{3} \cos x$ 在 $[0, \pi]$ 上的最大值是_____.

【参考答案】2

【详细解析】 $f(x) = \sin x - \sqrt{3} \cos x = 2 \sin(x - \frac{\pi}{3}) \leq 2$, 当且仅当 $x = \frac{5\pi}{6}$ 时取等号.

15. 已知 $a > 1$, $\frac{1}{\log_8 a} - \frac{1}{\log_a 4} = -\frac{5}{2}$, 则 $a =$ _____.

【参考答案】64

【详细解析】因为 $\frac{1}{\log_8 a} - \frac{1}{\log_a 4} = \frac{3}{\log_2 a} - \frac{1}{2} \log_2 a = -\frac{5}{2}$, 所以 $(\log_2 a + 1)(\log_2 a - 6) = 0$, 而 $a > 1$,

故 $\log_2 a = 6$, $a = 64$.

16. 曲线 $y = x^3 - 3x$ 与 $y = -(x-1)^2 + a$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个不同的交点, 则 a 的取值范围为_____.

【参考答案】 $(-2, 1)$

【详细解析】令 $x^3 - 3x = -(x-1)^2 + a$, 则 $a = x^3 - 3x + (x-1)^2$, 设 $\varphi(x) = x^3 - 3x + (x-1)^2$, $\varphi'(x) = (3x+5)(x-1)$, $\varphi(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上递增, 在 $(0, 1)$ 上递减. 因为曲线 $y = x^3 - 3x$ 与 $y = -(x-1)^2 + a$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个不同的交点, $\varphi(0) = 1$, $\varphi(1) = -2$, 所以 a 的取值范围为 $(-2, 1)$.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤. 第 17 题~第 21 题为必考题, 每个考题考生必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. (12 分) 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $2S_n = 3a_{n+1} - 3$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\{S_n\}$ 的通项公式.

【参考答案】见解析.

【详细解析】(1) 因为 $2S_n = 3a_{n+1} - 3$, 所以 $2S_{n+1} = 3a_{n+2} - 3$, 两式相减可得: $2a_{n+1} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1}$, 即: $3a_{n+2} = 5a_{n+1}$, 所以等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q = \frac{5}{3}$, 又因为 $2S_1 = 3a_2 - 3 = 5a_1 - 3$, 所以 $a_1 = 1$, $a_n = (\frac{5}{3})^{n-1}$;

(2) 因为 $2S_n = 3a_{n+1} - 3$, 所以 $S_n = \frac{3}{2}(a_{n+1} - 1) = \frac{3}{2}[(\frac{5}{3})^n - 1]$.

18. (12 分) 题干略.

【参考答案】见解析.

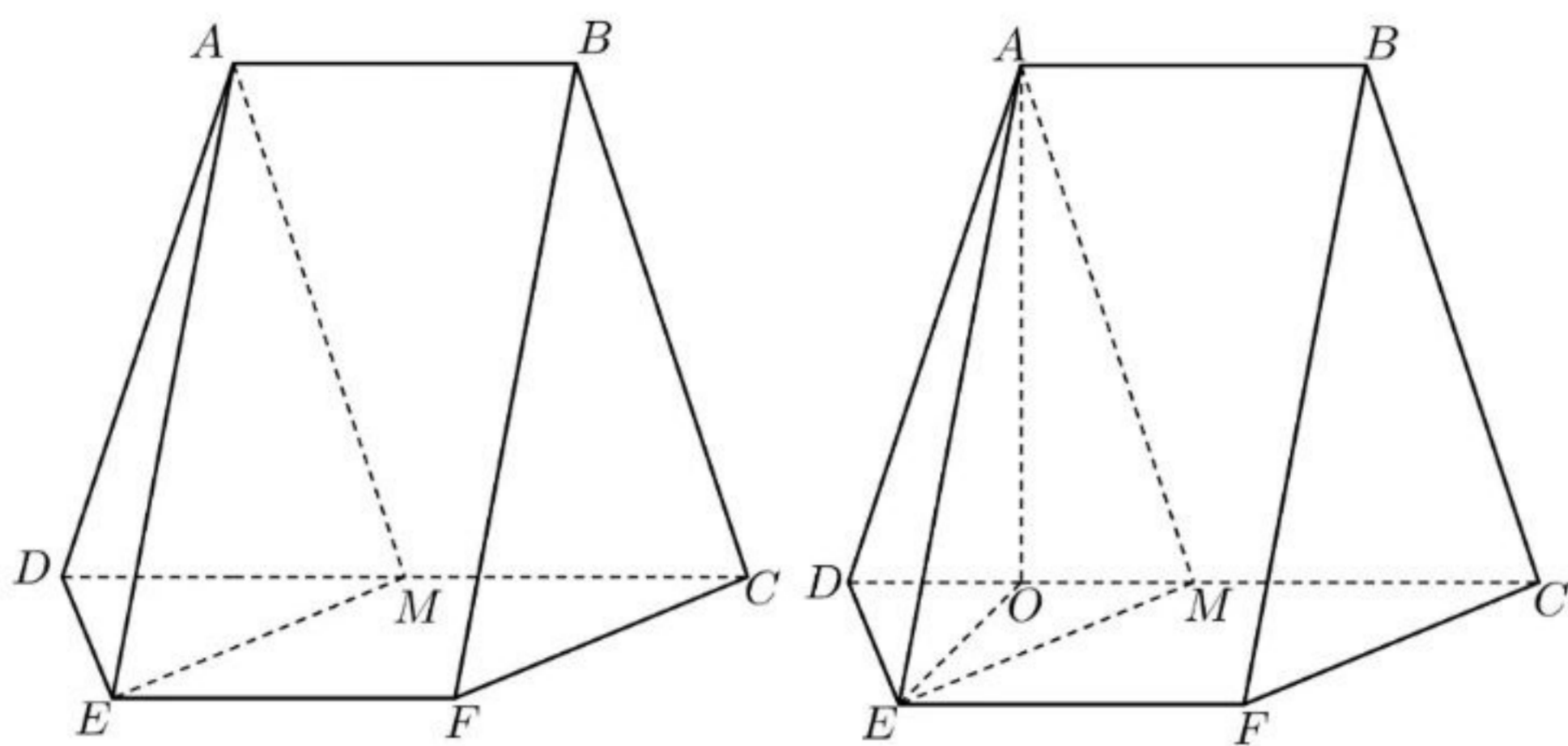
【详细解析】(1) $\chi^2 = \frac{150(70 \times 24 - 26 \times 30)^2}{96 \times 54 \times 50 \times 100} < 6.635$, 没有 99% 的把握;

(2) $\bar{p} > p + 1.65 \sqrt{\frac{p(1-p)}{150}}$, 故有优化提升.

19. (12分) 如图, 已知 $AB \parallel CD$, $CD \parallel EF$, $AB = DE = EF = CF = 2$, $CD = 4$, $AD = BC = \sqrt{10}$, $AE = 2\sqrt{3}$, M 为 CD 的中点.

(1) 证明: $EM \parallel$ 平面 BCF ;

(2) 求点 M 到 ADE 的距离.



【参考答案】见解析

【详细解析】(1) 由题意: $EF \parallel CM$, $EF = CM$, 而 $CF \not\subset$ 平面 ADO , $EM \not\subset$ 平面 ADO , 所以 $EM \parallel$ 平面 BCF ;

(2) 取 DM 的中点 O , 连结 OA , OE , 则 $OA \perp DM$, $OE \perp DM$, $OA = 3$, $OE = \sqrt{3}$, 而 $AE = 2\sqrt{3}$, 故 $OA \perp OE$, $S_{\triangle AOE} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. 因为 $DE = 2$, $AD = \sqrt{10}$, 所以 $AD \perp DE$, $S_{\triangle ADE} = \sqrt{10}$. DM 上点 M

到平面 ADE 的距离为 h , 所以 $V_{M-ADE} = \frac{1}{3} S_{\triangle ADE} \cdot h = \frac{1}{3} S_{\triangle AOE} \cdot DM$, $h = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{30}}{5}$, 故点 M 到

ADE 的距离为 $\frac{2\sqrt{30}}{5}$.

20. (12分) 已知函数 $f(x) = a(x-1) - \ln x + 1$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若 $a \leq 2$ 时, 证明: 当 $x > 1$ 时, $f(x) < e^{x-1}$ 恒成立.

【参考答案】见解析

【详细解析】(1) $f(x) = a(x-1) - \ln x + 1$, $f'(x) = \frac{ax-1}{x}$, $x > 0$.

若 $a \leq 0$, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 的减区间为 $(0, +\infty)$, 无增区间;

若 $a > 0$ 时, 当 $0 < x < \frac{1}{a}$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x > \frac{1}{a}$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 的减区间为 $(0, \frac{1}{a})$, 增区间为 $(\frac{1}{a}, +\infty)$;

(2) 因为 $a \leq 2$, 所以当 $x > 1$ 时, $e^{x-1} - f(x) = e^{x-1} - a(x-1) + \ln x - 1 \geq e^{x-1} - 2x + \ln x + 1$. 令 $g(x) = e^{x-1} - 2x + \ln x + 1$, 则 $g'(x) = e^{x-1} - 2 + \frac{1}{x}$. 令 $h(x) = g'(x)$, 则 $h'(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x^2}$ 在 $(1, +\infty)$ 上递增, $h'(x) > h'(1) = 0$, 所以 $h(x) = g'(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上递增, $g'(x) > g'(1) = 0$, 故 $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上递增, $g(x) > g(1) = 0$, 即: 当 $x > 1$ 时, $f(x) < e^{x-1}$ 恒成立.

21. (12分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 F , 点 $M(1, \frac{3}{2})$ 在椭圆 C 上, 且 $MF \perp x$ 轴.

(1)求椭圆 C 的方程;

(2) $P(4, 0)$, 过 P 的直线与椭圆 C 交于 A, B 两点, N 为 FP 的中点, 直线 NB 与 MF 交于 Q , 证明: $AQ \perp y$ 轴.

【参考答案】 见解析

【详细解析】 (1) 设椭圆 C 的左焦点为 F_1 , 则 $|F_1F| = 2$, $|MF| = \frac{3}{2}$. 因为 $MF \perp x$ 轴, 所以 $|MF_1| = \frac{5}{2}$, $2a = |MF_1| + |MF| = 4$, 解得: $a^2 = 4$, $b^2 = a^2 - 1 = 3$, 故椭圆 C 的方程为: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$;

(2) **解法 1:** 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{PB}$, 则 $\begin{cases} \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} = 4 \\ \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} = 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} \lambda x_2 = 4 + 4\lambda - x_1 \\ \lambda y_2 = -y_1 \end{cases}$. 又由

$\begin{cases} 3x_1^2 + 4y_1^2 = 12 \\ 3(\lambda x_2)^2 + 4(\lambda y_2)^2 = 12\lambda^2 \end{cases}$ 可得: $3 \cdot \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \cdot \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda} + 4 \cdot \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \cdot \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda} = 12$, 结合上式可得: $5\lambda -$

$2\lambda x_2 + 3 = 0$. $P(4, 0), F(1, 0), N(\frac{5}{2}, 0)$, 则 $y_Q = \frac{3y_2}{5 - 2x_2} = \frac{3\lambda y_2}{5\lambda - 2\lambda x_2} = -\lambda y_2 = y_1$, 故 $AQ \perp y$

轴.

解法 2: 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, , 则 $\frac{y_1}{x_1 - 4} = \frac{y_2}{x_2 - 4}$, 即: $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 4(y_2 - y_1)$, 所以 $(x_1 y_2 -$

$x_2 y_1)(x_1 y_2 + x_2 y_1) = x_1^2 y_2^2 - x_2^2 y_1^2 = (4 + \frac{4y_1^2}{3})y_2^2 - (4 + \frac{4y_2^2}{3})y_1^2 = 4(y_2 - y_1)(y_2 + y_1) = 4(y_2 - y_1)(x_1 y_2 + x_2 y_1)$,

即: $x_1 y_2 + x_2 y_1 = y_2 + y_1, 2x_2 y_1 = 5y_1 - 3y_2$. $P(4, 0), F(1, 0), N(\frac{5}{2}, 0)$, 则 $y_Q = \frac{3y_2}{5 - 2x_2} = \frac{3y_1 y_2}{5y_1 - 2y_1 x_2} = y_1$, 故 $AQ \perp y$ 轴.

(二)选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答, 并用 2B 铅笔将所选题号涂黑, 多涂、错涂、漏涂均不给分, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程](10 分) 在平面直角坐标系 xOy

中, 以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = \rho \cos \theta + 1$.

(1)写出 C 的直角坐标方程;

(2)直线 $\begin{cases} x = t \\ y = t + a \end{cases}$ (t 为参数)与曲线 C 交于 A, B 两点, 若 $|AB| = 2$, 求 a 的值.

【参考答案】 见解析

【详细解析】 (1) 因为 $\rho = \rho \cos \theta + 1$, 所以 $\rho^2 = (\rho \cos \theta + 1)^2$, 故 C 的直角坐标方程为: $x^2 + y^2 = (x + 1)^2$, 即: $y^2 = 2x + 1$;

(2) 将 $\begin{cases} x = t \\ y = t + a \end{cases}$ 代入 $y^2 = 2x + 1$ 可得: $t^2 + 2(a - 1)t + a^2 - 1 = 0$, $|AB| = \sqrt{2}|t_1 - t_2| = \sqrt{16(1 - a)} = 2$,

解得: $a = \frac{3}{4}$.

23. [选修 4-5: 不等式选讲](10 分)(微信公众号: yxwlszgzs)实数 a, b 满足 $a + b \geq 3$.

(1)证明: $2a^2 + 2b^2 > a + b$;

(2)证明: $|a - 2b^2| + |b - 2a^2| \geq 6$.

【解析】 (1) 因为 $a + b \geq 3$, 所以 $2a^2 + 2b^2 \geq (a + b)^2 > a + b$;

(2) $|a - 2b^2| + |b - 2a^2| \geq |a - 2b^2 + b - 2a^2| = |2a^2 + 2b^2 - (a + b)| = 2a^2 + 2b^2 - (a + b) \geq (a + b)^2 - (a + b) = (a + b)(a + b - 1) \geq 6$.