2024 年普通高等学校招生考试新课标 II 卷

数学

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效.

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．已知 $z=-1-\mathrm{i}$，则 $|z|=$

A．0　　B．1　　C．$\sqrt{2}$　　D．2

【答案】C

【锤子数学解】 $|z|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

2．已知命题：$p:\forall x\in\mathbf{R}$，$|x+1|>1$，命题 $q:\exists x>0$，$x^3=x$，则

A．p 和 q 都是真命题　　B．$\neg p$ 和 q 都是真命题

C．p 和 $\neg q$ 都是真命题　　D．$\neg p$ 和 $\neg q$ 都是真命题

【答案】B

【锤子数学解】 $x=0$ 不成立知 p 假，$x=1$ 时成立知 q 真，所以选 B.

3．已知向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=1$，$|\vec{a}+2\vec{b}|=2$，且 $(\vec{b}-2\vec{a})\perp\vec{b}$，则 $|\vec{b}|=$

A．$\dfrac{1}{2}$　　B．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D．1

【答案】B

【锤子数学解】 将条件二平方得 $1+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}^2=4$，由条件三得 $\vec{b}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，

所以$\vec{b}^2=\frac{1}{2}$，$|\vec{b}|=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4．某农业研究部门在面积相等的100块稻田上种植新型水稻，得到各块稻田的亩产量（单位：kg）并部分整理如下表所示：

亩产量	[900,950)	[950,1000)	[1000,1050)	[1050,1150)	[1150,1200)
频数	6	12	18	24	10

根据表中数据，下列结论正确的是

A．100块稻田亩产量的中位数小于1050kg

B．100块稻田中亩产量低于1100kg的稻田所占比例超过40%

C．100块稻田亩产量的极差介于200kg到300kg之间

D．100块稻田亩产量的平均值介于900kg到1000kg之间

【锤子数学解】题目不清

5．已知曲线$C:x^2+y^2=16(y>0)$，从C上任意一点P向x轴作垂线段PP'，P'为垂足，则线段PP'的中点M的轨迹方程为

A．$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1(y>0)$　　B．$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1(y>0)$

C．$\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{4}=1(y>0)$　　D．$\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{8}=1(y>0)$

【答案】A

【锤子数学解】即在y轴方向上压缩至原来的一半，圆半径为4，压缩后长半轴为4，短半轴为2.

6．设函数$f(x)=a(x+1)^2-1$，$g(x)=\cos x+2ax$（a为常数），当$x\in(-1,1)$时，曲线$y=f(x)$和$y=g(x)$恰有一个交点，则$a=$

A．-1　　B．$\frac{1}{2}$　　C．1　　D．2

【答案】D

【锤子数学解】$f(x)=g(x)\Rightarrow a=\dfrac{1+\cos x}{1+x^2}$

注意右边是偶函数，所以要只有一个交点就只能是在$x=0$处相切，于是直接代$x=0$得$a=2$.

7．已知正三棱台$ABC-A'B'C'$的体积为$\dfrac{52}{3}$，$AB=6$，$A_1B_1=2$，则AA'与平面ABC所成角的正切值为

A．$\dfrac{1}{2}$　　B．1　　C．2　　D．3

【答案】B

【锤子数学解】设棱台高为h，设三条侧棱延长后交于一点O，则由$AB=3A_1B_1$知：

O到上底的距离为$\dfrac{1}{2}h$，O到下底的距离为$\dfrac{3}{2}h$，

又$S_{ABC}=9\sqrt{3}$，$S_{A_1B_1C_1}=\sqrt{3}$，所以$\dfrac{1}{3}\cdot 9\sqrt{3}\cdot\dfrac{3}{2}h-\dfrac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\dfrac{1}{2}h=\dfrac{52}{3}\Rightarrow h=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$，

上底中心到顶点A的距离为$\dfrac{2}{\sqrt{3}}$，所以所求正切值为$\dfrac{\frac{1}{2}h}{\frac{2}{\sqrt{3}}}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}h=1$.

锤子点评：正三棱台的体积问题，近几年高考一直在考，平时的练习应该也比较常见.利用体积公式求出高以后可以求出侧棱与底面的夹角.

8．设函数$f(x)=(x+a)\ln(x+b)$，若$f(x)\geq 0$，则a^2+b^2的最小值为

A．$\dfrac{1}{8}$　　B．$\dfrac{1}{4}$　　C．$\dfrac{1}{2}$　　D．1

【答案】C

【锤子数学解】当$x<-a$时$x+a<0$，当$x>-a$时$x+a>0$，当$x<1-b$时$\ln(x+b)<0$，当$x>1-b$时$\ln(x+b)>0$，所以要$f(x)$恒非负，必须$-a=1-b$，即$b-a=1$，所以

$a^2+b^2=\dfrac{(a-b)^2+(a+b)^2}{2}\geq\dfrac{1}{2}$，当$a=-\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{1}{2}$时取等.

锤子点评：两个函数有两个零点，乘积恒大于等于0，一定会有零点相同，接下来就是二次函

数最值问题.

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9．对于函数 $f(x)=\sin 2x$ 和 $g(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$，下列正确的有

A． $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同零点

B． $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同最大值

C． $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的最小正周期

D． $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像有相同的对称轴

【答案】BC

【锤子数学解】 A 错，代 $x=0$ 便知；

B 显然对，两者值域相同；

C 显然对，两者最小正周期都为 π ；

D 错，前者对称轴为 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ，后者是 $x=\frac{3\pi}{8}+k\pi$.

10．抛物线 $C:y^2=4x$ 的准线为 l ，P 为 C 上的动点，过 P 作 $\odot A:x^2+(y-4)^2=1$ 的一条切线，Q 为切点.过 P 作 C 的垂线，垂足为 B ，则

A． l 与 $\odot A$ 相切

B．当 P 、 A 、 B 三点共线时，$|PQ|=\sqrt{15}$

C．当 $|PB|=2$ 时，$PA\perp AB$

D．满足 $|PA|=|PB|$ 的点 P 有且仅有 2 个

【答案】ABD

【锤子数学解】 A 显然正确；

B 正确，$A(0,4)$，当 P 、 A 、 B 共线时 $P(4,4)$ ，于是 $PQ=\sqrt{PA^2-r^2}=\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$ ；

C 错，当 $PB=2$ 时易知 $P(1,2)$ ，$B(-1,2)$ ，易知 PA 与 AB 并不垂直；

D 正确，焦点$F(1,0)$，$PB=PF$，则$PA=PB$等价于P在AF的中垂线上，该线的方程为

$y=\frac{1}{4}x+\frac{15}{8}$，易知它与抛物线有两交点.

锤子点评：考的是抛物线的基本性质，结合图象去理解，计算量很小的.

11．设函数$f(x)=2x^3-3ax^2+1$，则

A．当$a>1$时，$f(x)$的三个零点

B．当$a<0$时，$x=0$是$f(x)$的极大值点

C．存在a、b，使得$x=b$为曲线$f(x)$的对称轴

D．存在a，使得点$(1,f(1))$为曲线$y=f(x)$的对称中心

【答案】AD

【锤子数学解】求导得$f'(x)=6x(x-a)$，于是：

A 正确，当$a>1$时，极大值$f(0)=1>0$，极小值$f(a)=1-a^3<0$，所以必有三个零点；

B 错，$a<0$时$x=0$应为极小值点；

C 错，任何三次函数不存在对称轴；

D 正确，当$a=2$时$f(x)=2(x-1)^3-6(x-1)-3$，关于$(1,-3)$中心对称.

锤子点评：三次函数的图象与性质问题，是国卷比较青睐的题型，作为 11 题，没有起到压轴的作用.尤其 CD 三次函数有对称中心无对称轴，很快速的就可以判断出来.

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12．设S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和，若$a_3+a_4=7$，$3a_2+a_5=5$，则$S_{10}=$________.

【答案】95

【锤子数学解】设$a_n=a_1+(n-1)d$，则由条件得$2a_1+5d=7$，$4a_1+7d=5$，解得$a_1=-4$，$d=3$，

则$S_{10}=5(2a_1+9d)=95$.

13．已知α为第一象限角，β为第三象限角，$\tan\alpha+\tan\beta=4$，$\tan\alpha\tan\beta=\sqrt{2}+1$，则

$\sin(\alpha+\beta)=$________.

【答案】$-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

【锤子数学解】$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\cos\alpha\cos\beta(\tan\alpha+\tan\beta)$

$=4\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{-4}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}\sqrt{1+\tan^2\beta}}$

$=\dfrac{-4}{\sqrt{(\tan\alpha+\tan\beta)^2+(\tan\alpha\tan\beta-1)^2}}=\dfrac{-4}{\sqrt{4^2+2}}=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

锤子点评：三角恒等变换，最后要知道角的范围，从而求出最终结果的正负.

14．在下图的 $4*4$ 方格表中有 4 个方格，要求每行和每列均恰有一个方格被选中，则共有________种选法；在符合上述要求的选法中，选中方格中的四个数之和的最大值是__________.

11	21	31	40
12	22	33	42
13	22	33	43
15	24	34	44

【答案】24；112

【锤子数学解】第一空当然就是 $4!=24$；

第二空最大为 $15+21+33+43=112$.

锤子点评：以排列组合为背景考察，属于推理型的分割数表问题，解答题除了最后两题有一定的思维量和运算量，其他几个题目比较常规.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15．(13 分)记 $\triangle ABC$ 的内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，已知 $\sin A+\sqrt{3}\cos A=2$.

(1) 求 A；

(2) 若 $a=2$，$\sqrt{2}b\sin C=c\sin 2B$，求 $\triangle ABC$ 的周长.

【锤子数学解】

（1）$2\left(\frac{1}{2}\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A\right)=2$ ，$\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)=2$

$\therefore A+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$ ，$\therefore A=\frac{\pi}{6}$.

（2）$\sqrt{2}\sin B\sin C=\sin C\sin 2B$ ，$\therefore \sqrt{2}=2\cos B$ ，$\therefore \cos B=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore B=\frac{\pi}{4}$ ，$C=\frac{7\pi}{12}$

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ ，$\frac{2}{\frac{1}{2}}=\frac{b}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{c}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$ ，$\therefore b=2\sqrt{2}$ ，$c=\sqrt{6}+\sqrt{2}$ ，

周长$=2+\sqrt{6}+3\sqrt{2}$.

16.（15分）已知函数$f(x)=\mathrm{e}^x-ax-a^3$.

（1）当$a=1$时，求曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程；

（2）若$f(x)$有极小值，且极小值小于0，求a的取值范围.

【锤子数学解】

（1）$a=1$ ，$f(x)=\mathrm{e}^x-x-1$ ，切点$(1,\mathrm{e}-2)$ ，$f'(x)=\mathrm{e}^x-1$ ，$k=f'(1)=\mathrm{e}-1$

切点：$y-(\mathrm{e}-2)=(\mathrm{e}-1)(x-1)$ ，即$y=(\mathrm{e}-1)x-1$.

（2）$f'(x)=\mathrm{e}^x-a$ ，当$a\le 0$时，$f'(x)>0$ ，$f(x)$在$\mathbf{R}$上$\nearrow$ ，此时无极值

$\therefore a>0$ ，令$f'(x)=0$ ，$x=\ln a$

$f(x)$在$(-\infty,\ln a)\swarrow$ ，$(\ln a,+\infty)\nearrow$ ，

$\therefore f(x)_{极小值}=f(\ln a)=a-a\ln a-a^3<0$ ，$\therefore 1-\ln a-a^2<0$

令$g(a)=-a^2-\ln a+1$ ，$g'(a)=-2a\cdot\frac{1}{a}<0$

$g(a)$在$(0,+\infty)\swarrow$ ，而$g(1)=0$ ，$\therefore g(a)<0\Leftrightarrow a>1$

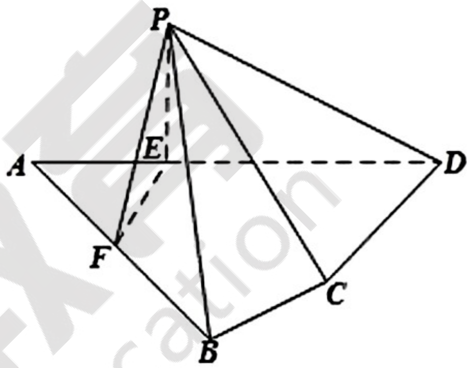
$\therefore a>1$.

17.（15分）如图，平面四边形$ABCD$中，$AB=8$ ，$CD=3$ ，$AD=5\sqrt{3}$ ，$\angle ADC=90°$ ，

$\angle BAD = 30°$，点 E、F 满足 $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，将 $\triangle AEF$ 沿 EF 对折至 $\triangle PEF$，使得 $PC = 4\sqrt{3}$.

（1）证明：$EF \perp PD$；

（2）求面 PCD 与面 PBF 所成的二面角的正弦值.



【锤子数学解】

（1）$\triangle AEF$ 中，$AE = \frac{2}{5}AD = 2\sqrt{3}$，$AF = \frac{1}{2}AB = 4$，$\angle EAF = 30°$

$\therefore \cos\angle EAF = \dfrac{AE^2 + AF^2 - EF^2}{2AE \cdot AF} = \dfrac{12 + 16 - EF^2}{2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore EF = 2$

$\therefore EF^2 + AE^2 = AE^2$，$\therefore AE \perp EF$，$\therefore PE \perp EF$，$DE \perp EF$

$PE \bigcap DE = E$，$PE, DE \subset$ 平面 PDE，$\therefore EF \perp$ 面 PDE

又 $\because PD \subset$ 平面 PDE，$\therefore EF \perp PD$.

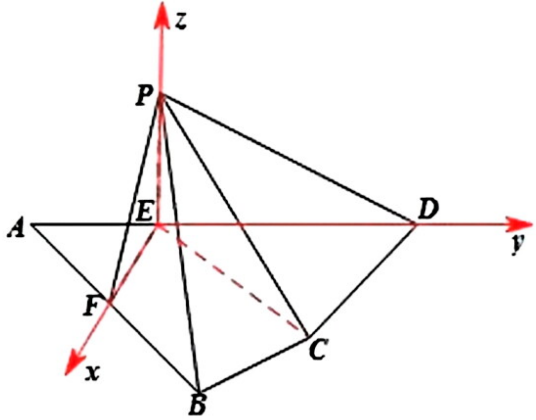
（2）$DE = 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$，$CD = 3$，$\angle CDE = 90°$，$\therefore CE^2 = 36$，$CE = 6$

$PE = AE = 2\sqrt{3}$，$\therefore PE^2 + CE^2 = PC^2$，$\therefore PE \perp CE$

又 $\because PE \perp EF$，$EF \bigcap CE = E$，$EF, CE \subset$ 平面 DEF

$\therefore PE \perp$ 面 DEF，$\therefore PE \perp ED$，即 EF, ED, EP 两两垂直

以 EF, ED, EP 分别为 x, y, z 轴建立如图所示空间直角坐标系 $E - xyz$



$P(0,0,2\sqrt{3})$，$D(0,3\sqrt{3},0)$，$F(2,0,0)$，$A(0,-2\sqrt{3},0)$，则$B(4,2\sqrt{3},0)$

$C(3,3\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{PD}=(0,3\sqrt{3},-2\sqrt{3})$，$\overrightarrow{CD}=(-3,0,0)$，$\overrightarrow{PB}=(4,2\sqrt{3},-2\sqrt{3})$，

$\overrightarrow{BF}=(-2,-2\sqrt{3},0)$

设平面PCD的法向量$\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$

$\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{PD}=0\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{CD}=0\end{cases}$，$\therefore\begin{cases}3\sqrt{3}y_1-2\sqrt{3}z_1=0\\ -3x_1=0\end{cases}$不妨设$y_1=2$，则$z_1=3$，$x_1=0$，$\overrightarrow{n_1}=(0,2,3)$

设平面PBF的法向量$\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$

$\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{PB}=0\\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{BF}=0\end{cases}$，$\therefore\begin{cases}4x_2+2\sqrt{3}y_2-2\sqrt{3}z_2=0\\ -2x_2-2\sqrt{3}y_2=0\end{cases}$

不妨设$x_2=\sqrt{3}$，则$y_2=-1$，$z_2=1$，$\overrightarrow{n_2}=(\sqrt{3},-1,1)$

设平面PCD与面PBF所成的二面角为α

$\cos\langle\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\dfrac{1}{\sqrt{13}\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{65}}{65}$，$\sin\alpha=\dfrac{8\sqrt{65}}{65}$.

18.（17分）某投篮比赛分为两个阶段，每个参赛队由两名队员组成，比赛具体规则如下：第一阶段由参赛队中一名队员投篮3次，若3次都未投中，则该队被淘汰，比赛成绩为0分；若至少投中1次，则该队进入第二阶段，由该队的另一名队员投篮3次，每次投中得5分，未投中得0分.该队的比赛成绩为第二阶段的得分总和.

某参赛队由甲、乙两名队员组成，设甲每次投中的概率为p，乙每次投中的概率为q，各次投中与否相互独立.

（1）若 $p=0.4$ ，$q=0.5$ ，甲参加第一阶段比赛，求甲、乙所在队的比赛成绩不少于5分的概率；

（2）假设 $0<p<q$.

（i）为使得甲、乙所在队的比赛成绩为15分的概率最大，应该由谁参加第一阶段比赛？

（ii）为使得甲、乙所在队的比赛成绩的数学期望最大，应该由谁参加第一阶段比赛？

【锤子数学解】

（1）甲、乙所在队的比赛成绩不少于5分，则甲第一阶段至少投中1次，

乙第二阶段也至少投中1次，

$\therefore$ 比赛成绩不少于5分的概率 $P=(1-0.6^3)(1-0.5^3)=0.686$.

（2）（i）若甲先参加第一阶段比赛，则甲、乙所在队的比赛成绩为15分的概率为

$P_{甲}=[1-(1-p)^3]q^3$

若乙先参加第一阶段比赛，则甲、乙所在队的比赛成绩为15分的概率为 $P_{乙}=[1-(1-q)^3]\cdot p^3$

$\therefore P_{甲}-P_{乙}=q^3-(q-pq)^3-p^3+(p-pq)^3$

$=(q-p)(q^2+pq+p^2)+(p-q)\cdot[(p-pq)^2+(q-pq)^2+(p-pq)(q-pq)]$

$=(p-q)(3p^2q^2-3p^2q-3pq^2)$

$=3pq(p-q)(pq-p-q)=3pq(p-q)[(1-p)(1-q)-1]>0$

$\therefore P_{甲}>P_{乙}$ ，$\therefore$ 应该由甲参加第一阶段比赛.

（ii）若甲先参加第一阶段比赛，数学成绩 X 的所有可能取值为 $0,5,10,15$ ，

$P(X=0)=(1-p)^3+[1-(1-p)^3]\cdot(1-q)^3$

$P(X=5)=[1-(1-p)^{32}]C_3^1q\cdot(1-q)^2$

$P(X=10)=[1-(1-p)^3]\cdot C_3^2q^2(1-q)$

$P(X=15)=[1-(1-p)^3]\cdot q^3$

$\therefore E(X)=15[1-(1-p)^3]q=15(p^3-3p^2+3p)\cdot q$

记乙先参加第一阶段比赛，数学成绩 y 的所有可能取值为 $0,5,10,15$

同理$E(Y)=15(q^3-3q^2+3q)\cdot p$

$\therefore E(X)-E(Y)=15[pq(p+q)(p-q)-3pq(p-q)]$

$=15(p-q)pq(p+q-3)>0$

$\therefore$ 应该由甲参加第一阶段比赛.

锤子点评：特别注意审题，只有当第一阶段的那个人三次投球至少投中一次，才能进入第二阶段，即第二阶段的那个人才能投球，而且该队的比赛成绩为第二阶段的得分总和，抓住这几个线索，底下这几问都可以迎刃而解，其中第二问的两小问计算比较复杂一些，要特别注意.

19.（17分）已知双曲线$C:x^2-y^2=m(m>0)$，点$P_1(5,4)$在C上，k为常数，$0<k<1$，按照如下公式依次构造点$P_n(n=2,3,\cdots)$：过点P_{n-1}作斜率为k的直线与C的左支点交于点Q_{n-1}，令P_n为Q_{n-1}关于y轴的对称点，记P_n的坐标为(x_n,y_n).

（1）若$k=\dfrac{1}{2}$，求x_2、y_2；

（2）证明：数列$\{x_n-y_n\}$是公比为$\dfrac{1+k}{1-k}$的等比数列；

（3）设S_n为$\triangle P_nP_{n+1}P_{n+2}$的面积，证明：对于任意正整数$n$，$S_n=S_{n+1}$.

【锤子数学解】

解析一：（1）$\because P_1(5,4)$在C上，$\therefore 25-16=m$，$m=9$

过$P_1(5,4)$且斜率为$k=\dfrac{1}{2}$的直线方程为$y-4=\dfrac{1}{2}(x-5)$，即$x-2y+3=0$

$$\begin{cases}x-2y+3=0\\x^2-y^2=9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3\\y=0\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=5\\y=4\end{cases}$$，$\therefore Q_1(-3,0)$，$P_2(3,0)$.

（2）$\because P_n(x_n,y_n)$关于y轴的对称点是$Q_{n-1}(-x_n,y_n)$，而$P_{n-1}(x_{n-1},y_{n-1})$

而P_{n-1},Q_{n-1}都在同一条斜率为k的直线上，$\therefore x_{n-1}\neq -x_n$

$\dfrac{y_n-y_{n-1}}{-x_n-x_{n-1}}=k$，$\because P_{n-1},Q_{n-1}$都在双曲线上

$$\therefore\begin{cases}x_n^2-y_n^2=9,①\\x_{n-1}^2-y_{n-1}^2=9,②\end{cases}$$，①$-$②$\Rightarrow(x_n-x_{n-1})(x_n+x_{n-1})=(y_n-y_{n-1})(y_n+y_{n-1})$

而 $y_n-y_{n-1}=-k(x_n+x_{n-1})$ ③，$x_n-x_{n-1}=-k(y_n+y_{n-1})$ ④，

④−③ $\Rightarrow x_n-y_n-(x_{n-1}-y_{n-1})=k(x_n-y_n)+k(x_{n-1}-y_{n-1})$

$\therefore (1-k)(x_n-y_n)=(1+k)(x_{n-1}-y_{n-1})$，$\therefore \dfrac{x_n-y_n}{x_{n-1}-y_{n-1}}=\dfrac{1+k}{1-k}$

即数列 $\{x_n-y_n\}$ 是公比为 $\dfrac{1+k}{1-k}$ 的等比数列.

（3）要证：$S_n=S_{n+1}$，只需先尝试 $P_{n+1}P_{n+2} \parallel P_nP_{n+3}$，即先证 $k_{P_{n+1}P_{n+2}}=k_{P_nP_{n+3}}$

记 $t=\dfrac{1+k}{1-k}$，$0<k<1 \Rightarrow t>1$

$\therefore x_n-y_n=(x_1-y_1)\left(\dfrac{1+k}{1-k}\right)^{n-1}=t^{n-1}$

而 $x_n^2-y_n^2=9$，$\therefore x_n+y_n=9t^{1-n}$，$\therefore y_n=\dfrac{1}{2}(-t^{n-1}+9t^{1-n})$

而 $\dfrac{1}{k_{P_{n+1}P_{n+2}}}=\dfrac{x_{n+2}-x_{n+1}}{y_{n+2}-y_{n+1}}=\dfrac{y_{n+2}+t^{n+1}-y_{n+1}-t^n}{y_{n+2}-y_{n+1}}$

$=1+\dfrac{2t^n(t-1)}{(-t^{n+1}9t^{-1-n})-(-t^n+9t^{-n})}=1+\dfrac{2t^n(t-1)}{(-9t^{-1-n}-t^n)(t-1)}=1-\dfrac{2t^n}{9t^{-1-n}+t^n}$

$\dfrac{1}{k_{P_nP_{n+3}}}=\dfrac{y_{n+3}+t^{n+2}-y_n-t^{n-1}}{y_{n+3}-y_n}=1+\dfrac{2t^{n-1}(t^3-1)}{(-t^{n+2}+9t^{-2-n})-(-t^{n-1}+9t^{1-n})}$

$=1+\dfrac{2t^{n-1}(t^3-1)}{(-9t^{-2-n}-t^{n-1})(t^3-1)}=1-\dfrac{2t^{n-1}}{9t^{-2-n}+t^{n-1}}=1-\dfrac{2t^n}{9t^{-1-n}+t^n}$

$\therefore k_{P_{n+1}P_{n+2}}=k_{P_nP_{n+3}}$，$\therefore P_{n+1}P_{n+2} \parallel P_nP_{n+3}$，$\therefore S_n=S_{n+1}$.

解析二：

（1）先无脑把那些未知的解出来，比如把 $(5,4)$ 丢进去，会得到 $m=5^2-4^2=9$

当 $k=\dfrac{1}{2}$ 时，会有直线方程 $\dfrac{1}{2}(x-5)=y-4$

这个和双曲线联立，得到另一个交点 $R_1:(-3,0)$，

于是 P_2 作为 R_1 关于 y 轴的对称点，就得有 $P_2(3,0)$，$x_2=3$，$y_2=0$.

（2）首先，R_{n-1} 是肯定在双曲线上的，而 P_n 作为 R_{n-1} 关于 y 轴的对称点，也得在双曲线上.

对于P_{n+1}而言，首先这条过P_n的直线，会有方程$k(x-x_n)=y-y_n$

注意它的解为$R_n(-x_{n+1},y_{n+1})$，也就是有$\begin{cases}k(-x_{n+1}-x_n)=y_{n+1}-y_n\\x_n^2-y_n^2=9\\x_{n+1}^2-y_{n+1}^2=9\end{cases}$

这里第二、三式相减，得到$(x_{n+1}-x_n)(x_{n+1}+x_n)=(y_{n+1}+y_n)(y_{n+1}-y_n)$

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}+y_n}=\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}+x_n}=k$$

那么，按等比定理，就会有$\frac{x_{n+1}-x_n+y_{n+1}-y_n}{y_{n+1}+y_n+x_{n+1}+x_n}=\frac{x_{n+1}-x_n-y_{n+1}+y_n}{y_{n+1}+y_n-x_{n+1}-x_n}=-k$

方便起见我们令$x_n-y_n=a_n$，$x_n+y_n=b_n$，于是$-\frac{b_{n+1}-b_n}{b_{n+1}+b_n}=\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}+a_n}=k$

$$a_{n+1}=\frac{1+k}{1-k}a_n.$$

（3）前面其实也可以看到，我弄了个对解上一问毫无意义的b_n出来，现在就用上了.

不难发现b_n其实有公比$\frac{1-k}{1+k}$的，这里可以令$q=\frac{1+k}{1-k}$

$a_n=aq^{n-1}$，$b_n=bq^{-(n-1)}$

然后又显然会有$\begin{cases}x_n=\frac{a_n+b_n}{2}=\frac{a_1q^{n-1}+\frac{b_1}{q^{n-1}}}{2}\\y_n=\frac{b_n-a_n}{2}=\frac{\frac{b_1}{q^{n-1}}-a_1q^{n-1}}{2}\end{cases}$

然后，我们求过P_{n+1}的高，首先求P_nP_{n+2}的直线方程，由两点式可以得到

$\left(\frac{y_{n+2}-y_n}{x_{n+2}-x_n}\right)(x-x_n)=y-y_n$，$(y_{n+2}-y_n)(x-x_n)=(x_{n+2}-x_n)(y-y_n)$

$(y_{n+2}-y_n)x-y_{n+2}x_n=(x_{n+2}-x_n)y-y_nx_{n+2}$，

$(y_{n+2}-y_n)x-(x_{n+2}-x_n)y+y_nx_{n+2}-y_{n+2}x_n=0$

于是$h=\frac{(y_{n+2}-y_n)x_{n+1}-(x_{n+2}-x_n)y_{n+1}+y_nx_{n+2}-y_{n+2}x_n}{\sqrt{(y_{n+2}-y_n)^2+(x_{n+2}-x_n)^2}}$

$$2S_n = h\cdot P_nP_{n+2} = (y_{n+2}-y_n)x_{n+1}-(x_{n+2}-x_n)y_{n+1}+y_nx_{n+2}-y_{n+2}x_n$$

$$=\frac{1}{4}(b_{n+2}-a_{n+2}-b_n+a_n)(b_{n+1}-a_{n+1})-\frac{1}{4}(b_{n+2}+a_{n+2}-b_n-a_n)(b_{n+1}+a_{n+1})$$

$$+\frac{1}{4}(b_n-a_n)(b_{n+2}+a_{n+2})-\frac{1}{4}(b_n+a_n)(b_{n+2}-a_{n+2})$$

$$=\frac{ab}{2}\left[q+q^2+\frac{1}{q}-q-\frac{1}{q^2}-\frac{1}{q}\right]=\frac{ab}{2}\left(q^2-\frac{1}{q^2}\right)$$

很明显，a,b,q 都是定值，这个 S_n 跟 n 没有关系，就是个定值，因此证明完毕.

锤子点评：以圆锥曲线和数列进行结合考察面比较广，这种题目早期全国卷好像在九几年考过，属于老古董，而且这种类型竞赛也经常考，主要是抓住坐标变换的定义.第二问注意点差法的使用.第三问整体难度较大，可以通过证明 $P_{n+1}P_{n+2} \parallel P_nP_{n+3}$，也可以在知道三角形三个顶点坐标的情况下用三角形的向量表达式的面积公式进行处理.