2024 年普通高等学校招生考试新课标 II 卷

数　学

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，满分 40 分。每小题给出的备选答案中，只有一个是符合题意的。

1. 已知$z=-1-\mathrm{i}$，则$|z|=$

A. 0　　B. 1　　C. $\sqrt{2}$　　D. 2

2. 已知命题p: $\forall x\in\mathbf{R}$, $|x+1|>1$；命题q: $\exists x>0$, $x^3=x$，则

A. p和q都是真命题　　B. $\neg p$和q都是真命题

C. p和$\neg q$都是真命题　　D. $\neg p$和$\neg q$都是真命题

3. 已知向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$满足：$|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=2$，且$(\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a})\perp\boldsymbol{b}$，则$|\boldsymbol{b}|=$

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D. 1

4. 某农业研究部门在面积相等的 100 块稻田上种植新型水稻，得到各块稻田的亩产量（单位：kg）并部分整理如下表所示。

亩产	[900,950)	[950,1000)	[1000,1050)	[1050,1150)	[1150,1200)
频数	6	12	18	24	10

根据表中数据，下列结论正确的是

A. 100 块稻田亩产量的中位数小于 1050 kg

B. 100 块稻田中亩产量低于 1100 kg 的稻田所占比例超过 40%

C. 100 块稻田亩产量的极差介于 200 kg 到 300 kg 之间

D. 100 块稻田亩产量的平均值介于 900 kg 到 1000 kg 之间

5. 已知曲线$C:x^2+y^2=16\ (y>0)$，从C上任意一点P向x轴作垂线段PP'，P'为垂足，则线段PP'的中点M的轨迹方程为

A. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1\ (y>0)$　　B. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{8}=1\ (y>0)$

C. $\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{x^2}{4}=1\ (y>0)$　　D. $\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{x^2}{8}=1\ (y>0)$

6. 设函数$f(x)=a(x+1)^2-1$，$g(x)=\cos x+2ax$（a为常数），当$x\in(-1,1)$时，曲线$y=f(x)$和$y=g(x)$恰有一个交点，则$a=$

A. -1　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. 1　　D. 2

7. 已知正三棱台$ABC-A'B'C'$的体积为$\dfrac{52}{3}$，$AB=6$，$A_1B_1=2$，则AA'与平面ABC所成角的正切值为

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. 1　　C. 2　　D. 3

8. 设函数$f(x)=(x+a)\ln(x+b)$，若$f(x)\geqslant 0$，则a^2+b^2的最小值为

A. $\dfrac{1}{8}$　　B. $\dfrac{1}{4}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. 1

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，满分 18 分。每小题给出的备选答案中，有多个选项是符合题意的。全部选对得 6 分，部分选对得 3 分，选错或不选得 0 分。

9. 对于函数$f(x)=\sin 2x$和$g(x)=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$，下列正确的有

A. $f(x)$与$g(x)$有相同零点　　B. $f(x)$与$g(x)$有相同最大值

C. $f(x)$与$g(x)$有相同的最小正周期　　D. $f(x)$与$g(x)$的图像有相同对称轴

10. 抛物线C: $y^2=4x$的准线为l，P为C上动点，过P作$\odot A:x^2+(y-4)^2=1$的一条切线，Q为切点。过P作C的垂线，垂足为B，则

A. l与$\odot A$相切

B. 当P、A、B三点共线时，$|PQ|=\sqrt{15}$

C. 当$|PB|=2$时，$PA\perp AB$

D. 满足$|PA|=|PB|$的点A有且仅有 2 个

11. 设函数$f(x)=2x^3-3ax^2+1$，则

A. 当$a>1$时，$f(x)$的三个零点

B. 当$a<0$时，$x=0$是$f(x)$的极大值点

C. 存在a、b，使得$x=b$为曲线$f(x)$的对称轴

D. 存在a，使得点$(1,f(1))$为曲线$y=f(x)$的对称中心

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，满分 15 分。

12. 记S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和，若$a_3+a_4=7$，$3a_2+a_5=5$，则$S_{10}=$________。

13. 已知α为第一象限角，β为第三象限角，$\tan\alpha+\tan\beta=4$，$\tan\alpha\tan\beta=\sqrt{2}+1$，则$\sin(\alpha+\beta)=$________。

14. 在下图的 4*4 方格表中有 4 个方格，要求每行和每列均恰有一个方格被选中，则共有________种选法；在符合上述要求的选法中，选中方格中的四个数之和的最大值是________。

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

四、解答题：本题共 5 小题，满分 87 分。解答应写出必要的文字说明、计算过程、证明过程。

15. （本题满分 13 分）

记△ABC的内角A、B、C的对边分别为a、b、c，已知$\sin A+\sqrt{3}\cos A=2$。

（1）求A；

（2）若$a=2$，$\sqrt{2}b\sin C=c\sin 2B$，求△ABC的周长。

16. （本题满分 15 分）

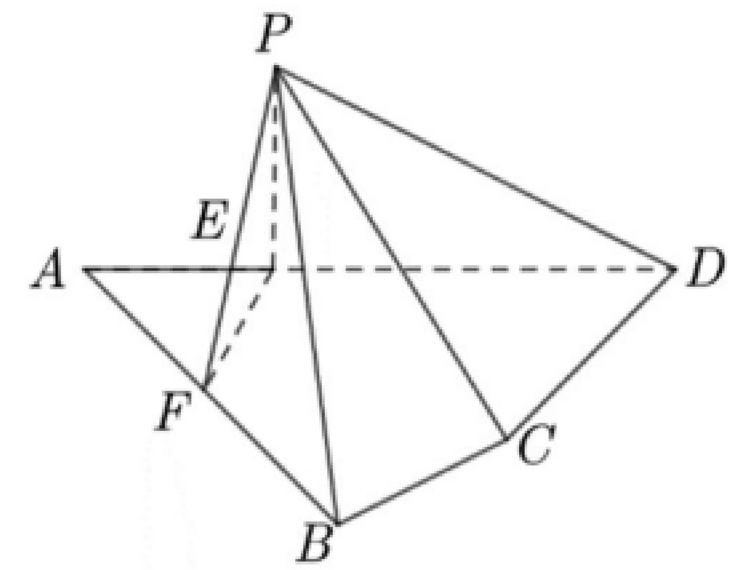
已知函数$f(x)=e^x-ax-a^3$。

（1）当$a=1$时，求曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程。

（2）若$f(x)$有极小值，且极小值小于 0，求a的取值范围。

17. （本题满分 15 分）

如图，平面四边形$ABCD$中，$AB=8$，$CD=3$，$AD=5\sqrt{3}$，$\angle ADC=90°$，$\angle BAD=30°$，点E、F满足$\overrightarrow{AE}=\frac{7}{5}\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，将$\triangle AEF$沿$EF$对折至$\triangle PEF$，使得$PC=4\sqrt{3}$。



（1）证明：$EF\perp PD$。

（2）求面PCD与面PBF所成的二面角的正弦值。

18. （本题满分 17 分）

某投篮比赛分为两个阶段，每个参赛队由两名队员组成，比赛具体规则如下：第一阶段由参赛队中一名队员投篮 3 次，若 3 次都未投中，则该队被淘汰，比赛成绩为 0 分；若至少投中 1 次，则该队进入第二阶段，由该队的另一名队员投篮 3 次，每次投中得 5 分，未投中得 0 分。该队的比赛成绩为第二阶段的得分总和。

某参赛队由甲、乙两名队员组成，设甲每次投中的概率为p，乙每次投中的概率为q，各次投中与否相互独立。

（1）若$p=0.4$，$q=0.5$，甲参加第一阶段比赛，求甲、乙所在队的比赛成绩不少于 5 分的概率。

（2）假设$0<p<q$。

（i）为使得甲、乙所在队的比赛成绩为 15 分的概率最大，应该由谁参加第一阶段比赛？

（ii）为使得甲、乙所在队的比赛成绩的数学期望最大，应该由谁参加第一阶段比赛？

19. （本题满分 17 分）

已知双曲线C: $x^2-y^2=m$ $(m>0)$，点$P_1(5,4)$在C上，k为常数，$0<k<1$，按照如下公式依次构造点P_n $(n=2,3,\ldots)$：过点P_{n-1}作斜率为k的直线与C的左支点交于点Q_{n-1}，令P_n为Q_{n-1}关于y轴的对称点，记P_n的坐标为(x_n,y_n)。

（1）若$k=\frac{1}{2}$，求x_2、y_2。

（2）证明：数列$\{x_n-y_n\}$是公比为$\frac{1+k}{1-k}$的等比数列。

（3）设S_n为$\triangle P_nP_{n+1}P_{n+2}$的面积，证明：对于任意正整数$n$，$S_n=S_{n+1}$。