2024年新高考1卷

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．已知集合$A=\{x|-5<x^3<5\}$，$B=\{-3,-1,0,2,3\}$，则$A\cap B=$【答案】A

A．$\{-1,0\}$　　B．$\{2,3\}$　　C．$\{-3,-1,0\}$　　D．$\{-1,0,2\}$

【锤子数学解】$A\cap B=\{-1,0\}$，选A.

2．若$\dfrac{2}{z-1}=1+\mathrm{i}$，则$z=$【答案】C

A．$-1-\mathrm{i}$　　B．$-1+\mathrm{i}$　　C．$1-\mathrm{i}$　　D．$1+\mathrm{i}$

3．已知向量$\vec{a}=(0,1)$，$\vec{b}=(2,x)$，若$\vec{b}\perp(\vec{b}-4\vec{a})$，则$x=$【答案】D

A．-2　　B．-1　　C．1　　D．2

【锤子数学解】$\vec{b}-4\vec{a}=(2,x-4)$，$\vec{b}\perp(\vec{b}-4\vec{a})$，$\therefore\vec{b}(\vec{b}-4\vec{a})=0$

$\therefore 4+x(x-4)=0$，$\therefore x=2$，选D.

4．已知$\cos(\alpha+\beta)=m$，$\tan\alpha\tan\beta=2$，则$\cos(\alpha-\beta)=$【答案】A

A．$-3m$　　B．$-\dfrac{m}{3}$　　C．$\dfrac{m}{3}$　　D．$3m$

【锤子数学解】$\begin{cases}\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=m\\ \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=2\end{cases}$　$\begin{cases}\sin\alpha\sin\beta=-2m\\ \cos\alpha\cos\beta=-m\end{cases}$

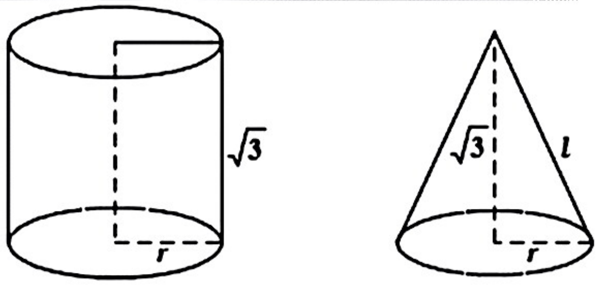
$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=-m-2m=-3m$，选A.

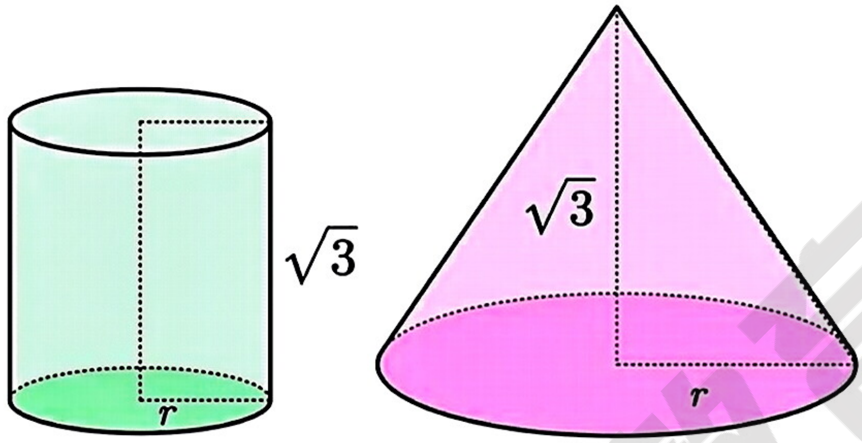
5．已知圆柱和圆锥的底面半径相等，侧面积相等，且它们的高均为$\sqrt{3}$，则圆锥的体积为【答案】B

A．$2\sqrt{3}\pi$　　B．$3\sqrt{3}\pi$　　C．$6\sqrt{3}\pi$　　D．$9\sqrt{3}\pi$

【锤子数学解】设它们底面半径为r，圆锥母线l，$\therefore 2\pi r\sqrt{3}=\pi rl$，$\therefore l=2\sqrt{3}=\sqrt{3+r^2}$

$\therefore r=3$，$V=\dfrac{1}{3}\cdot\pi\cdot 9\cdot\sqrt{3}=3\sqrt{3}\pi$，选B.





6．已知函数为 $f(x)=\begin{cases}-x^2-2ax-a,x<0\\ e^x+\ln(x+1),x\geq 0\end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，则 a 的取值范围是【答案】B

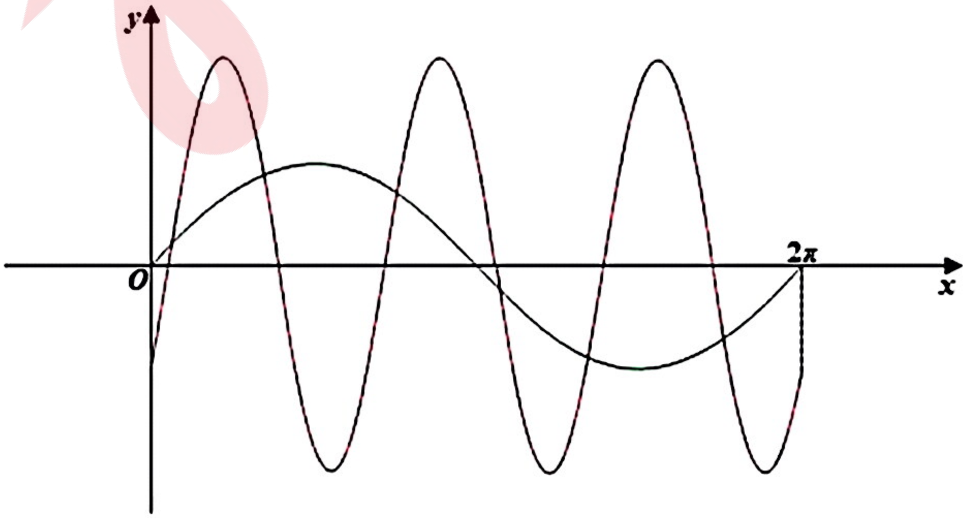
A．$(-\infty,0]$　　B．$[-1,0]$　　C．$[-1,1]$　　D．$[0,+\infty)$

【锤子数学解】$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上↗，$\begin{cases}-a\geq 0\\ -a\leq e^0+\ln 1\end{cases}$，$\therefore -1\leq a\leq 0$，选 B.

7．当 $x\in[0,2\pi]$ 时，曲线 $y=\sin x$ 与 $y=2\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的交点个数为【答案】C

A．3　　B．4　　C．6　　D．8

【锤子数学解】6个交点，选 C.



8．已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(x)>f(x-1)+f(x-2)$，且当 $x<3$ 时，$f(x)=x$，

则下列结论中一定正确的是【答案】B

A．$f(10)>100$　　B．$f(20)>1000$

C．$f(10)<1000$　　D．$f(20)<10000$

【锤子数学解】$f(1)=1$，$f(2)=2$，$f(3)>f(2)+f(1)=3$，$f(4)>f(3)+f(2)>5$

$f(5)>f(4)+f(3)>8$，$f(6)>f(5)+f(4)>13$，$f(7)>f(6)+f(5)>21$

$f(8)>f(7)+f(6)>34$，$f(9)>f(8)+f(7)>55$，$f(10)>f(9)+f(8)>89$

$f(11)>f(10)+f(9)>144$，$f(12)>f(11)+f(10)>233$，$f(13)>f(12)+f(11)>377$

$f(14)>f(13)+f(12)>610$，$f(15)>f(14)+f(13)>987$，$f(16)>1000$

$\therefore f(20)>1000$，选 B.

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9．为了解推动出口后的亩收入（单位：万元）情况，从该种植区抽取样本，得到推动出口后亩收入的样本均值 $\overline{X}=2.1$，样本方差 $S^2=0.01$，已知该种植区以往的亩收入 X 服从正态分布 $N(1.8,0.1^2)$，假设推动出口后的亩收入 Y 服从正态分布 $N(\overline{X},S^2)$，则（若随机变量 Z 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(Z<\mu+\sigma)\approx 0.8413$）

A．$P(X>2)>0.2$　　B．$P(X>2)<0.5$

C．$P(Y>2)>0.5$　　D．$P(Y>2)<0.8$

【答案】BC

【锤子数学解】$X\sim N(1.8,0.1^2)$，$Y\sim N(2.1,0.1^2)$

$2=1.8+2\times 0.1=\mu+2\sigma$

$P(X>2)=P(X>\mu+2\sigma)<P(X>\mu+\sigma)=1-0.8413=0.1587$，A 错.

$P(X>2)<P(X>1.8)=0.5$，B 对.

$2=2.1-0.1=\mu-\sigma$，$P(Y>2)>P(Y>2.1)=0.5$，C 对.

$P(Y>2)=P(Y>\mu-\sigma)=P(Y<\mu+\sigma)=0.8413>0.8$，D 错.选 BC

10．设函数 $f(x)=(x-1)^2(x-4)$ ，则

A． $x=3$ 是 $f(x)$ 的极小值点

B．当 $0<x<1$ 时， $f(x)<f(x^2)$

C．当 $1<x<2$ 时， $-4<f(2x-1)<0$

D．当 $-1<x<1$ 时， $f(2-x)>f(x)$

【答案】ACD

【锤子数学解】 A 对，因为 $f'(x)=3(x-1)(x-3)$ ；

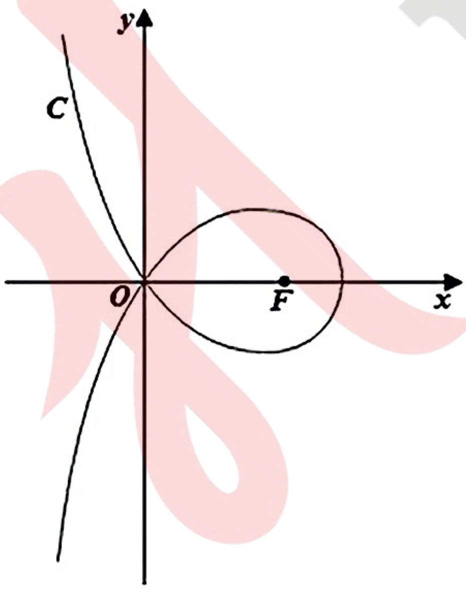
B 错，因为当 $0<x<1$ 时 $f'(x)>0$ 且 $0<x^2<x<1$ ，所以 $f(x^2)<f(x)$ ；

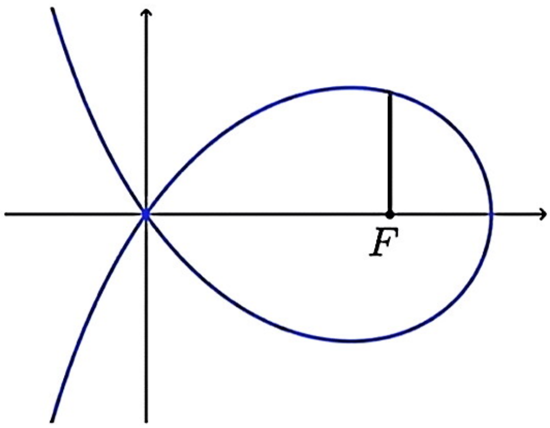
C 对，因为： $f(2x-1)=4(x-1)^2(2x-5)<0$ ， $f(2x-1)+4=4(x-2)^2(2x-1)>0$

$f(2-x)-f(x)=(x-1)^2(-2-x)-(x-1)^2(x-4)=(x-1)^2(-2x+2)=-2(x-1)^3$ ，

$-1<x<1$ 时， $f(2-x)-f(x)>0$ ， $f(2-x)>f(x)$ ，D 对.

11．造型  可以看作图中的曲线 C 的一部分，已知 C 过坐标原点 O ，且 C 上的点满足横坐标大于 -2 ，到点 $F(2,0)$ 的距离与到定直线 $x=a(a<0)$ 的距离之积为 4 ，则



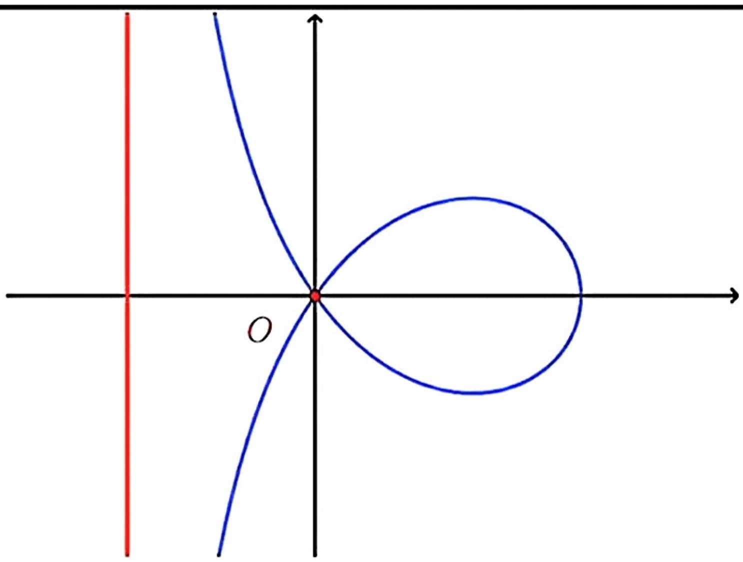


A． $a=-2$

B．点 $(2\sqrt{2},0)$ 在 C 上

C． C 在第一象限的点的纵坐标的最大值为 1

D．当点 (x_0,y_0) 在 C 上时， $y_0\le\dfrac{4}{x_0+2}$



【答案】ABD

【锤子数学解】A 对，因为O在曲线上，所以O到$x=a$的距离为$-a$，而$OF=2$，

所以有$-a\cdot 2=4\Rightarrow a=-2$，那么曲线的方程为$(x+2)\sqrt{(x-2)^2+y^2}=4$.

B 对，因为代入$(2\sqrt{2},0)$知满足方程；

C 错，因为$y^2=\left(\dfrac{4}{x+2}\right)^2-(x-2)^2=f(x)$，求导得$f'(x)=-\dfrac{32}{(x+2)^3}-2(x-2)$，

那么有$f(2)=1$，$f'(2)=-\dfrac{1}{2}<0$，于是在$x=2$的左侧必存在一小区间$(2-\varepsilon,2)$上满足

$f(x)>1$，因此最大值一定大于1；

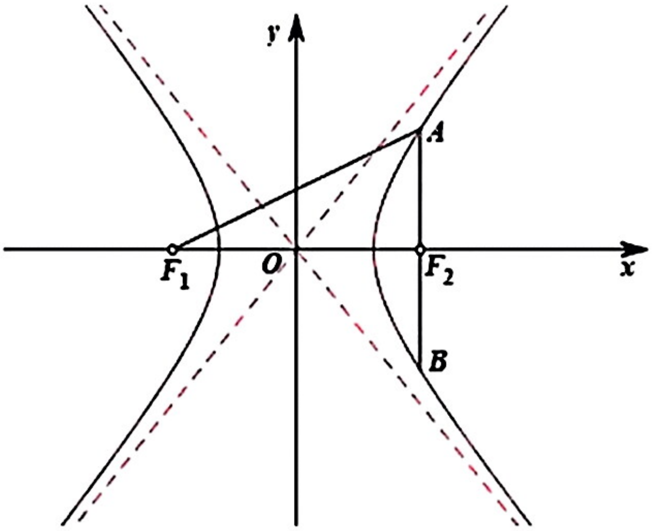
D 对，因为${y_0}^2=\left(\dfrac{4}{x_0+2}\right)^2-(x_0-2)^2\le\left(\dfrac{4}{x_0+2}\right)^2\Rightarrow y_0\le\dfrac{4}{x_0+2}$.

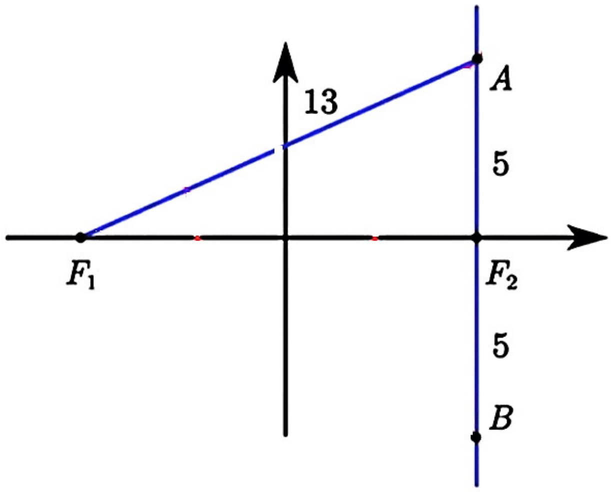
三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12．设双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1,F_2$，过$F_2$作平行于$y$轴的直线交$C$于$A,B$两点，若$|F_1A|=13$，$|AB|=10$，则$C$的离心率为__________.

【答案】$\dfrac{3}{2}$

【锤子数学解】方法一：$AF_2=5$，$2a=13-5=8$，$2c=F_1F_2=2c=12$，$\therefore\dfrac{c}{a}=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}$





方法二： 由 $|AB|=10$ 知 $|F_2A|=5$ ，即 $\dfrac{b^2}{a}=\dfrac{c^2-a^2}{a}=5$ ，而 $F_1F_2\perp F_1A$ ，所以 $|F_1F_2|=12$ ，

即 $c=6$ ，代回去解得 $a=4$ ，所以 $e=\dfrac{3}{2}$

13 .若曲线 $y=\mathrm{e}^x+x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线也是曲线 $y=\ln(x+1)+a$ 的切线 ,则 $a=$________

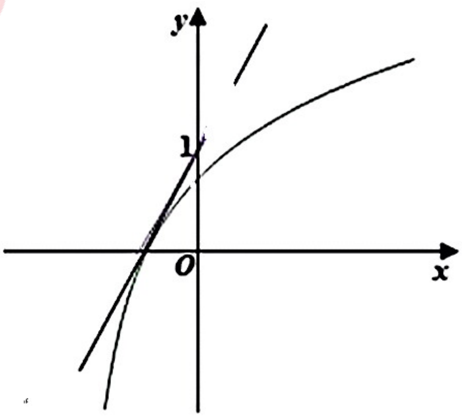
【答案】 $\ln 2$

【锤子数学解】**方法一：** 切点 $A(0,1)$ ，$y'=\mathrm{e}^x+1$ ，$k=2$ ，切线 $y-1=2x$ ，即 $y=2x+1$

切点 $B(x_0,\ln(x_0+1)+a)$ ，$y'=\dfrac{1}{x+1}$ ，$k=\dfrac{1}{x_0+1}$ ，切线 $y-(\ln(x_0+1)+a)=\dfrac{1}{x_0+1}(x-x_0)$

$$y=\frac{1}{x_0+1}x-\frac{x_0}{x_0+1}+\ln(x_0+1)+a\ ,\ \therefore\begin{cases}\dfrac{1}{x_0+1}=2\\ \ln(x_0+1)-\dfrac{x_0}{x_0+1}+a=1\end{cases}$$

$$\therefore\begin{cases}x_0=-\dfrac{1}{2}\\ a=\ln 2\end{cases}\ ,\ \therefore a=\ln 2 .$$



方法二： 易知切线为 $y=2x+1$ ，设其与 $y=\ln(x+1)+a$ 的切点横坐标为 x_0 ，

则$\frac{1}{x_0+1}=2\Rightarrow x_0=-\frac{1}{2}$，又$2x_0+1=\ln(x_0+1)+a$，代入得$a=\ln 2$.

14．甲、乙两人各有四张卡片，每张卡片上标有一个数字，甲的卡片上分别标有数字$1,3,5,7$，乙的卡片上分别标有数字$2,4,6,8$，两人进行四轮比赛，在每轮比赛中，两人各自从自己持有的卡片中随机选一张，并比较所选卡片上数字的大小，数字大的人得1分，数字小的人得0分，然后各自弃置此轮所选的卡片（弃置的卡片在此后的轮次中不能使用）.则四轮比赛后，甲的总得分不小于2的概率为_________.

【答案】 $\frac{1}{2}$

【锤子数学解】 甲出1一定输，所以最多3分，要得3分，就只有一种组合$1-8$、$3-2$、$5-4$、$7-6$.

得2分有三类，分别列举如下：

（1）出3和出5的赢，其余输：$1-6$，$3-2$，$5-4$，$7-8$

（2）出3和出7的赢，其余输：$1-4$，$3-2$，$5-8$，$7-6$；$1-8$，$3-2$，$5-6$，$7-4$

$1-6$，$3-2$，$5-8$，$7-4$

（3）出5和出7的赢，其余输：$1-2$，$3-8$，$5-4$，$7-6$；$1-4$，$3-8$，$5-2$，$7-6$；

$1-8$，$3-4$，$5-2$，$7-6$；$1-6$，$3-8$，$5-2$，$7-4$；$1-8$，$3-6$，$5-2$，$7-4$

$1-6$，$3-8$，$5-4$，$7-2$；$1-8$，$3-6$，$5-4$，$7-2$

共12种组合满足要求，而所有组合为$4!$，所以甲得分不小于2的概率为$\frac{12}{4!}=\frac{1}{2}$.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15．（13 分）记$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，已知$\sin C=\sqrt{2}\cos B$，$a^2+b^2-c^2=\sqrt{2}ab$.

（1）求B；

（2）若$\triangle ABC$的面积为$3+\sqrt{3}$，求C.

【锤子数学解】

（1）已知$a^2+b^2-c^2=\sqrt{2}ab$，根据余弦定理$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

可得：$\cos C=\dfrac{\sqrt{2}ab}{2ab}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

因为$C\in(0,\pi)$，所以$C=\dfrac{\pi}{4}$

又因为$\sin C=\sqrt{2}\cos B$，即$\sin\dfrac{\pi}{4}=\sqrt{2}\cos B$，$\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\cos B$，解得$\cos B=\dfrac{1}{2}$.

因为$B\in(0,\pi)$，所以$B=\dfrac{\pi}{3}$

（2）由（1）知$B=\dfrac{\pi}{3}$，$C=\dfrac{\pi}{4}$，则$A=\pi-B-C=\pi-\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{5\pi}{12}$.

已知$\triangle ABC$的面积为$3+\sqrt{3}$，且$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C$，

则$\dfrac{1}{2}ab\sin\dfrac{\pi}{4}=3+\sqrt{3}$，即$\dfrac{1}{2}ab\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=3+\sqrt{3}$，$ab=2(3+2\sqrt{3})$.

又由正弦定理$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，可得$c=\dfrac{a\sin C}{\sin A}=\dfrac{b\sin C}{\sin B}$

则$\dfrac{c}{\sin\dfrac{\pi}{4}}=\dfrac{a}{\sin\dfrac{5\pi}{12}}$，$a=\dfrac{c\sin\dfrac{5\pi}{12}}{\sin\dfrac{\pi}{4}}$，同理$b=\dfrac{c\sin\dfrac{\pi}{3}}{\sin\dfrac{\pi}{4}}$

所以$ab=\dfrac{c^2\sin\dfrac{5\pi}{12}\sin\dfrac{\pi}{3}}{\sin^2\dfrac{\pi}{4}}=\dfrac{c^2\left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{1}{2}}=2(3+2\sqrt{3})$

解得$c=2\sqrt{2}$.

16.（15分）已知$A(0,3)$和$P\left(3,\dfrac{3}{2}\right)$为椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上两点.

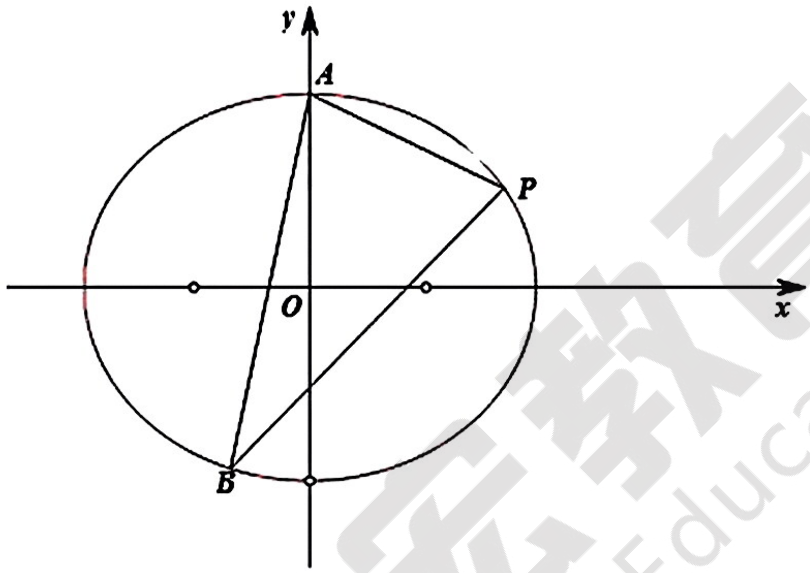
（1）求C的离心率；

（2）若过P的直线L交C于另一点B，且$\triangle ABP$的面积为9，求L的方程.

【锤子数学解】

（1）将 $A(0,3)$，$P\left(3,\dfrac{3}{2}\right)$ 代入椭圆 $\begin{cases}\dfrac{0}{a^2}+\dfrac{9}{b^2}=1\\ \dfrac{9}{a^2}+\dfrac{\frac{9}{4}}{b^2}=1\end{cases}$，则 $\begin{cases}a^2=12\\ b^2=9\end{cases}$

$c=\sqrt{3}$，$\therefore e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}$.



（2）当 L 的斜率不存在时，$L:x=3$，$B\left(3,-\dfrac{3}{2}\right)$，$PB=3$，$A$ 到 PB 距离 $d=3$

此时 $S_{\triangle ABP}=\dfrac{1}{2}\times3\times3=\dfrac{9}{2}\neq9$ 不满足条件.

②当 L 的斜率存在时，设 $PB:y-\dfrac{3}{2}=k(x-3)$，令 $P(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$

$\begin{cases}y=k(x-3)+\dfrac{3}{2}\\ \dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{9}=1\end{cases}$，消 y 可得 $(4k^2+3)x^2-(24k^2-12k)x+36k^2-36k-27=0$

$\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{24k^2-12k}{4k^2+3}\\ x_1x_2=\dfrac{36k^2-36k-27}{4k^2+3}\end{cases}$，$PB=\dfrac{4\sqrt{3}\sqrt{k^2+1}\sqrt{3k^2+9k+\dfrac{27}{4}}}{4k^2+3}$

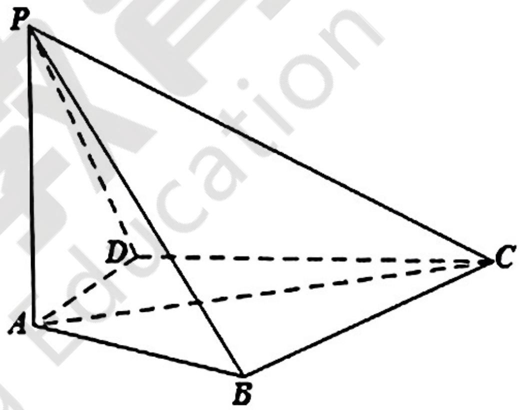
A 到 PB 距离 $d=\dfrac{\left|3k+\dfrac{3}{2}\right|}{\sqrt{k^2+1}}$，$S=\dfrac{1}{2}\dfrac{4\sqrt{3}\sqrt{k^2+1}\sqrt{3k^2+9k+\dfrac{27}{4}}}{4k^2+3}=\dfrac{\left|3k+\dfrac{3}{2}\right|}{\sqrt{k^2+1}}=9$

$\therefore k=\frac{1}{2}$或$\frac{3}{2}$，$\therefore L: y=\frac{1}{2}x$或$y=\frac{3}{2}x-3$.

17.（15分）如图，四棱锥$P-ABCD$中，$PA\perp$底面$ABCD$，$PA=AC=2$，$BC=1$，$AB=\sqrt{3}$.

（1）若$AD\perp PB$，证明：$AD\parallel$平面PBC；

（2）若$AD\perp DC$，且二面角$A-CP-D$的正弦值为$\frac{\sqrt{42}}{7}$，求AD.



【锤子数学解】

（1）$PA\perp$面$ABCD$，$AD\subset$平面$ABCD$，$\therefore PA\perp AD$

又$\because AD\perp PB$，$PB\cap PA=P$，$PB,PA\subset$平面PAB

$\therefore AD\perp$面PAB，$\therefore AB\subset$平面PAB，$\therefore AD\perp AB$

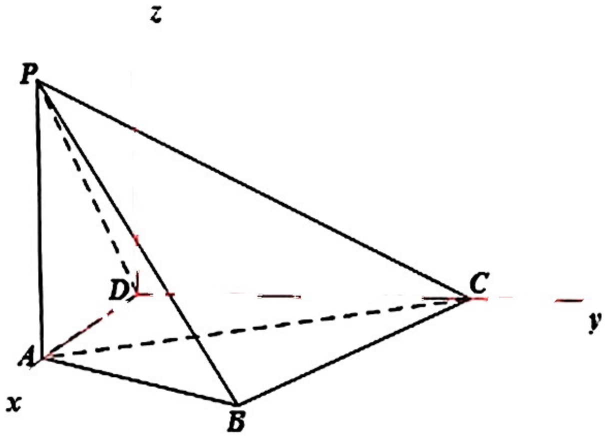
$\triangle ABC$中，$AB^2+BC^2=AC^2$，$\therefore AB\perp BC$

$\because A,B,C,D$四点共面，$\therefore AD\parallel BC$

又$\because BC\subset$平面PBC，$AD\not\subset$平面PBC

$\therefore AD\parallel$平面PBC.

（2）以DA,DC为x,y轴过D作与平面$ABCD$垂直的线为z轴建立如图所示空间直角坐标系$D-xyz$



令 $AD=t$，则 $A(t,0,0)$，$P(t,0,2)$，$D(0,0,0)$，$DC=\sqrt{4-t^2}$，$C(0,\sqrt{4-t^2},0)$

设平面 ACP 的法向量 $\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$

$$\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{AC}=0\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{AP}=0\end{cases}，\therefore\begin{cases}-tx_1+\sqrt{4-t^2}y_1=0\\ 2z_1=0\end{cases}$$

不妨设 $x_1=\sqrt{4-t^2}$，则 $y_1=t$，$z_1=0$，$\overrightarrow{n_1}=(\sqrt{4-t^2},t,0)$

设平面 CPD 的法向量为 $\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$

$$\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{DP}=0\\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{DC}=0\end{cases}，\therefore\begin{cases}tx_2+2z_2=0\\ \sqrt{4-t^2}y_2=0\end{cases}$$ 不妨设 $z_2=t$，则 $x_2=-2$，$y_2=0$

$\overrightarrow{n_2}=(-2,0,t)$

$\because$ 二面角 $A-CP-D$ 的正弦值 $\dfrac{\sqrt{42}}{7}$，则余弦值为 $\dfrac{\sqrt{7}}{7}$

$$\therefore\frac{\sqrt{7}}{7}=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right\rangle\right|=\frac{\left|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\frac{2\sqrt{4-t^2}}{2\sqrt{t^2+4}}$$

$\therefore t=\sqrt{3}$，$\therefore AD=\sqrt{3}$.

18.（17分）已知函数 $f(x)=\ln\dfrac{x}{2-x}+ax+b(x-1)^3$

（1）若 $b=0$，且 $f'(x)\geq 0$，求 a 的最小值；

（2）证明：曲线 $y=f(x)$ 是中心对称图形；

（3）若 $f(x)>-2$，当且仅当 $1<x<2$，求 b 的取值范围.

【锤子数学解】

（1）$b=0$时，$f(x)=\ln\dfrac{x}{2-x}+ax$，$f'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2-x}+a\geq 0$ 对$\forall 0<x<2$恒成立

而$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2-x}+a=\dfrac{2}{x(2-x)}+a\geq 2+a$，当且仅当$x=1$时取“=”，故只需$2+a\geq 0$

$\Rightarrow a\geq -2$，即a的最小值为-2.

（2）　　　$x\in(0,2)$，$f(2-x)+f(x)$

$=\ln\dfrac{2-x}{x}+a(2-x)+b(1-x)^3+\ln\dfrac{x}{2-x}+ax+b(x-1)^3=2a$

$\therefore f(x)$关于$(1,a)$中心对称.

方法二：

将$f(x)$向左平移一个单位$\Rightarrow f(x+1)=\ln\dfrac{x+1}{1-x}+a(x+1)+bx^3$关于$(0,a)$中心对称

平移回去$\Rightarrow f(x)$关于$(1,a)$中心对称.

（3）$\because f(x)>-2$当且仅当$1<x<2$，$\therefore f(1)=-2\Rightarrow a=-2$

$\therefore f(x)=\ln\dfrac{x}{2-x}-2x+b(x-1)^3>-2$ 对$\forall 1<x<2$恒成立

$$f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{2-x}-2+3b(x-1)=\frac{2(x-1)^2}{x(2-x)}+3b(x-1)^2=(x-1)^2\left[\frac{2}{x(2-x)}+3b\right]$$

令$g(x)=\dfrac{2}{x(2-x)}+3b$，$\therefore$必有$g(1)=2+3b\geq 0\Rightarrow b\geq -\dfrac{2}{3}$（必要性）

否则$b<-\dfrac{2}{3}$，存在$x\in(1,\delta)$使$f'(x)<0$，$f(x)$在$(1,2)$上↙，$\therefore f(x)<f(1)=-2$

当$b\geq -\dfrac{2}{3}$时，对$\forall x\in(1,2)$，$f(x)\geq \ln\dfrac{x}{2-x}-2x-\dfrac{2}{3}(x-1)^3=h(x)$

$$h'(x)=\frac{2(x-1)^2}{x(2-x)}-2(x-1)^2=2(x-1)^2\left[\frac{1}{x(2-x)}-1\right]>0$$

对$\forall x\in(1,2)$恒成立，$\therefore h(x)>h(1)=-2$符合条件，

综上：$b\geq -\dfrac{2}{3}$.

19.（17分）设m为正整数，数列$a_1,a_2,\cdots,a_{4m+2}$是公差不为0的等差数列，若从中删去两项a_i和$a_j(i<j)$后剩余的$4m$项可被平均分为m组，且每组的4个数都能构成等差数列，则称数列$a_1,a_2,\cdots,a_{4m+2}$是$(i,j)-$可分数列.

（1）写出所有的$(i,j),1\le i<j\le 6$，使数列$a_1,a_2,\cdots,a_6$是$(i,j)-$可分数列；

（2）当$m\ge 3$时，证明：数列$a_1,a_2,\cdots,a_{4m+2}$是$(2,13)-$可分数列；

（3）从$1,2,\cdots,4m+2$中一次任取两个数i和$j(i<j)$，记数列$a_1,a_2,\cdots,a_{4m+2}$是$(i,j)-$可分数列的概率为P_m，证明：$P_m>\dfrac{1}{8}$

【锤子数学解】

解析一：

（1）以下(i,j)满足：$(1,2)$，$(1,6)$，$(5,6)$

（2）易知：a_p,a_q,a_r,a_s等差$\Leftrightarrow p,q,r,s$等差

故只需证明：$1,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,14$可分

分组为$(1,4,7,10)$，$(3,6,9,12)$，$(5,8,11,14)$即可

其余a_k，$15\le k\le 4m+2$，按连续4个为一组即可

（3）由第（2）问易发现．$a_1,a_2,\cdots,a_{4m+2}$是(i,j)可分的$\Leftrightarrow 1,2,\cdots 4m+2$是$(i,j)$可分的.

易知：$1,2,\cdots,4m+2$是$(4k+1,4r+2)$可分的$(0\le k\le r\le m)$

因为可分为$(1,2,3,4),\cdots(4k-3,4k-2,4k-1,4k)$与

$(4(r+1)-1,4(r+1),4(r+1)+1,4(r+1)+2),\cdots,(4m-1,4m,4m+1,4m+2)$

此时共$C_{m+1}^2+(m+1)=\dfrac{1}{2}(m+1)(m+2)$种

再证：$1,2,\cdots,4m+2$是$(4k+2,4r+1)$可分的$(0\le k<r\le m)$

易知$1\sim 4k$与$4r+2\sim 4m+2$是可分的

只需考虑$4k+1,4k+3,4k+4,\cdots,4r-1,4r,4r+2$

记$p=r-k\in\mathbf{N}^*$，只需证：$1,3,4,5,\cdots,4p-1,4p,4p+2$可分

$1\sim 4p+2$去掉2与$4p+1$

观察：$p=1$时，$1,3,4,6$无法做到；

$p=2$时，$1,3,4,5,6,7,8,10$，可以做到；

$p=3$时，$1,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,14$

$p=4$时，$1,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,18$

$(1,5,9,13),(3,7,11,15),(4,8,12,16),(6,10,14,18)$满足

故$\forall p\geq 2$，可划分为：

$(1,p+1,2p+1,3p+1),(3,p+3,2p+3,3p+3),(4,p+4,2p+4,3p+4)$

$(5,p+5,2p+5,3p+5),\cdots,(p,2p,3p,4p),(p+2,2p+2,3p+2,4p+2)$

共p组

事实上，就是$(i,p+i,2p+i,3p+i),i=1,2,3,\cdots,p$，且把$2$换成$4p+2$

此时$(k,k+p),p\geq 2$均可行，共$C_{m+1}^2-m=\dfrac{1}{2}m(m-1)$组

$(0,1),(1,2),\cdots,(m-1,m)$不可行

综上，可行的$(4k+2,4r+1)$与$(4k+1,4r+2)$至少$\dfrac{1}{2}m(m-1)+\dfrac{1}{2}(m+1)(m+2)$组

故$P_m\geq\dfrac{\frac{1}{2}(2m^2+2m+2)}{C_{4m+2}^2}=\dfrac{m^2+m+1}{(2m+1)(4m+1)}=\dfrac{m^2+m+1}{8m^2+6m+1}>\dfrac{1}{8}$，得证！

解析二：

（1）$(i,j)=(1,6),(1,2),(5,6)$

（2）当$m=3$时，$a_1,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9,a_{10},a_{11},a_{12},a_{14}$

可分成三组：a_1,a_4,a_7,a_{10}；a_3,a_6,a_9,a_{12}；a_5,a_8,a_{11},a_{14}每组均为公差为$3d$的等差数列

$\therefore m=3$时符合.

$\therefore m>3$时，数列$a_1,a_2,\cdots,a_{4m+2}$去掉a_2,a_{13}以后，分成m组

只需让前面的3组还按$m=3$时的分法，即a_1,a_4,a_7,a_{10}；a_3,a_6,a_9,a_{12}；a_5,a_8,a_{11},a_{14}

后面的每4个相邻的项一组即可，即$a_{15},a_{16},a_{17},a_{18}$；$\cdots,a_{4m-1},a_{4m},a_{4m+1},a_{4m+2}$

每一组都能构成等差数列，$\therefore$数列$a_1,a_2,\cdots,a_{4m+2}$是$(2,13)-$可分数列.

（3）**法一：**当$m=1$时，数列：a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6为可分数列的概率为$P_m=\frac{3}{C_6^2}=\frac{1}{5}>\frac{1}{8}$

当$m=2$时，数列$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{10}$为可分数列的概率为$P_m=\frac{7}{C_{10}^2}=\frac{7}{15}>\frac{1}{8}$

以此类推，且易知$1,2,\cdots,4m+2$是$(4k+1,4r+2)$可分的$(0\le k\le r\le m)$

此时共有$C_{m+1}^2+m+1=\frac{m(m+1)}{2}+m+1=\frac{1}{2}(m+1)(m+2)$种

且易证数列也是$(4k+2,4r+1)$可分的$(0\le k<r\le m)$，至少有$C_{m+2}^2-m=\frac{1}{2}m(m-1)$

综上：可行的$(4k+2,4r+1)$与$(4k+1,4r+2)$至少

$\frac{1}{2}m(m-1)+\frac{1}{2}(m+1)(m+2)=m^2+m+1$组

$$\therefore P_m\ge\frac{m^2+m+1}{C_{4m+2}^2}=\frac{m^2+m+1}{(2m+1)(4m+1)}=\frac{m^2+m+1}{8m^2+6m+1}>\frac{1}{8}.$$

法二：$a_1,a_2,\cdots,a_{4m+2}$为$(4x+1,4x+4y+2)$可分数列$(0\le x\le m,0\le y\le m-x)$

易证：$a_1,a_2,\cdots,a_{4x}$为连续$4x$项，$a_{4x+2},a_{4x+3},\cdots,a_{4x+4y+1}$为连续$4y$项

$\therefore a_{4x+4y+3}-a_{4m+2}$为连续$4(m-x-y)$项等差数列

$$P_m=\frac{\frac{(m+2)(m+1)}{2}+\frac{m(m-1)}{2}}{\frac{(4m+2)(4m+1)}{2}}=\frac{m^2+m+1}{(2m+1)(4m+1)}>\frac{1}{8}.$$

解析三：

（1）枚举法

$(i,j)=(1,2)$，剩余数列：a_3,a_4,a_5,a_6

$(i,j)=(1,3)$，剩余数列：a_2,a_4,a_5,a_6

$(i,j)=(1,4)$，剩余数列：a_2,a_3,a_5,a_6

$(i,j)=(1,5)$，剩余数列：a_2,a_3,a_4,a_6

$(i,j)=(1,6)$，剩余数列：a_2,a_3,a_4,a_5

$(i,j)=(2,3)$，剩余数列：a_1,a_4,a_5,a_6

$(i,j)=(2,4)$，剩余数列：a_1,a_3,a_5,a_6 $(i,j)=(2,5)$，剩余数列：a_1,a_3,a_4,a_6

$(i,j)=(2,6)$，剩余数列：a_1,a_3,a_4,a_5 $(i,j)=(3,4)$，剩余数列：a_1,a_2,a_5,a_6

$(i,j)=(3,5)$，剩余数列．a_1,a_2,a_4,a_6 $(i,j)=(3,6)$，剩余数列．a_1,a_2,a_4,a_5

$(i,j)=(4,5)$，剩余数列：a_1,a_2,a_3,a_6 $(i,j)=(4,6)$，剩余数列：a_1,a_2,a_3,a_5

$(i,j)=(5,6)$，剩余数列：a_1,a_2,a_3,a_4 故符合条件的(i,j)为：$(1,2),(1,6),(5,6)$.

（2）证明：由题意下标和项是成等差的充要条件，故等差数列$a_1,a_2,\cdots a_{4m+2}$公差去掉第 2 和第 13 项，剩余数列为$a_1,a_3,a_4,\cdots a_{12},a_{14}$，可分为四组$(1,4,7,10),(3,6,9,12),(5,8,11,14)$，则其余$a_k,k\in[15,4m+2]$按照连续 4 个为一组即满足.

（3）证明：由（2）得数列$a_1,a_2,\cdots a_{4m+2}$是$(i,j)-$可分数列$\Leftrightarrow 1,2,\cdots,4m+2$是$(i,j)-$可分.

则$1,2,\cdots,4m+2$是$(4k+1,4k+2)$可分的，

因可分为$(1,2,3,4),(5,6,7,8),\cdots,(4k-3,4k-2,4k-1,4k)$和

$(4(s+1)-1,4(s+1),4(s+1)+1,4(s+1)+2),\cdots,(4m-1,4m,4m+1,4m+2)$，

共有$C_{m+1}^2+m+1=\dfrac{(m+1)(m+2)}{2}$种.

而$1\cdots 4k$和$4s+2\cdots 4m+2$是可分的，只需证$4k+1,4k+3,4k+4,\cdots,4s-1,4s,4s+2$是可分的.

令$t=s-k\in N^*$，只要证$1,3,4,5,\cdots,4t-1,4t,4t+2$是可分的，$1\cdots 4t+2$去掉 2 和$4t+1$.

当$t=1$时，$(1,3,4,6)$不满足；当$t=2$时，$(1,3,5,7),(4,6,8,10)$满足；

当$t=3$时，$(1,4,7,10),(3,6,9,12),(5,8,11,14)$满足；

当$t=4$时，$(1,5,9,13),(3,7,11,15),(4,8,12,16),(6,10,14,18)$满足.

则$t\ge 2$时，可划分为t组：

$(1,t+1,2t+1,3t+1),(3,t+3,2t+3,3t+3),(4,t+4,2t+4,3t+4),$

$\cdots,(t,2t,3t,4t),(t,2t+2,3t+2,4t+2)$.

本质即：$(i,t+i,2t+i,3t+i),i=1,2,3,\cdots,t$，且把 2 代换为$4t+2$，

则$(k,k+t),t\geq 2$均符合，共$C_{m+1}^{2}-m=\dfrac{m(m-1)}{2}$组.而$(0,1),(1,2),\cdots,(m-1,m)$不合要求.

综上可得：符合要求的$(4k+2,4t+1)$与$(4k+1,4t+2)$至少$\dfrac{m(m-1)}{2}+\dfrac{(m+1)(m+2)}{2}$组，

故$P_m\geq\dfrac{\frac{1}{2}(2m^2+2m+2)}{C_{4m+2}^{2}}=\dfrac{m^2+m+1}{8m^2+6m+1}=\dfrac{1}{8-\dfrac{2m+7}{m^2+m+1}}>\dfrac{1}{8}$