

## 2024 年普通高等学校招生全国统一考试

## 数 学

本试卷共 4 页，22 小题，满分 150 分。考试用时 120 分钟。

- 注意事项：**1. 答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔分别填写在试题卷和答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型（A）填涂在答题卡相应位置上。将条形码横贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。
2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案，答案不能答在试卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答的答案无效。
4. 考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共计 40 分。每小题给出的四个选项中，只有一个选项是正确的。请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上。

1. 已知集合  $A = \{x | -5 < x^3 < 5\}$ ， $B = \{-3, -1, 0, 2, 3\}$ ，则  $A \cap B =$
- A.  $\{-1, 0\}$                       B.  $\{2, 3\}$                       C.  $\{-3, -1, 0\}$                       D.  $\{-1, 0, 2\}$
2. 若  $\frac{z}{z-1} = 1+i$ ，则  $z =$
- A.  $-1-i$                       B.  $-1+i$                       C.  $1-i$                       D.  $1+i$
3. 已知向量  $a = (0, 1)$ ， $b = (2, x)$ ，若  $b \perp (b - 4a)$ ，则  $x =$
- A.  $-2$                       B.  $-1$                       C.  $1$                       D.  $2$
4. 已知  $\cos(\alpha + \beta) = m$ ， $\tan \alpha \tan \beta = 2$ ，则  $\cos(\alpha - \beta) =$
- A.  $-3m$                       B.  $-\frac{m}{3}$                       C.  $\frac{m}{3}$                       D.  $3m$
5. 已知圆柱和圆锥的底面半径相等，侧面积相等，且它们的高均为  $\sqrt{3}$ ，则圆锥的体积为
- A.  $2\sqrt{3}\pi$                       B.  $3\sqrt{3}\pi$                       C.  $6\sqrt{3}\pi$                       D.  $9\sqrt{3}\pi$
6. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2ax - a, & x < 0, \\ e^x + \ln(x+1), & x \geq 0 \end{cases}$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增，则  $a$  的取值范围是
- A.  $(-\infty, 0]$                       B.  $[-1, 0]$                       C.  $[-1, 1]$                       D.  $[0, +\infty)$

7. 当  $x \in [0, 2\pi]$  时, 曲线  $y = \sin x$  与  $y = 2\sin(3x - \frac{\pi}{6})$  的交点个数为
- A. 3                      B. 4                      C. 6                      D. 8
8. 已知函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ ,  $f(x) > f(x-1) + f(x-2)$ , 且当  $x < 3$  时,  $f(x) = x$ , 则下列结论中一定正确的是
- A.  $f(10) > 100$       B.  $f(20) > 1\,000$       C.  $f(10) < 1\,000$       D.  $f(20) < 10\,000$

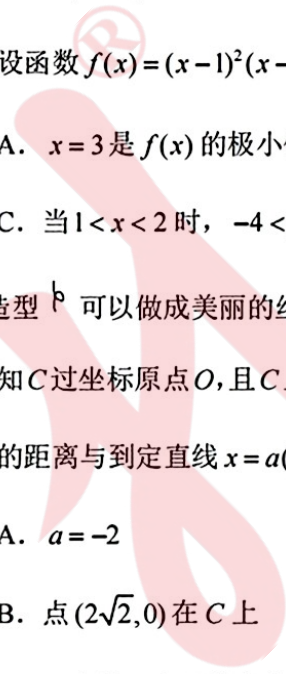
二、选择题：本大题共 3 小题，每小题 6 分，共计 18 分。每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对得 6 分，选对但不全的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 为了解推动出口后的亩收入（单位：万元）情况，从该种植区抽取样本，得到推动出口后亩收入的样本均值  $\bar{x} = 2.1$ , 样本方差  $s^2 = 0.01$ , 已知该种植区以往的亩收入  $X$  服从正态分布  $N(1.8, 0.1^2)$ , 假设推动出口后的亩收入  $Y$  服从正态分布  $(\bar{x}, s^2)$ , 则（若随机变量  $Z$  服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ , 则  $P(Z < \mu + \sigma) \approx 0.8413$ ）

- A.  $P(X > 2) > 0.2$                       B.  $P(X > 2) < 0.5$   
C.  $P(Y > 2) > 0.5$                       D.  $P(Y > 2) < 0.8$

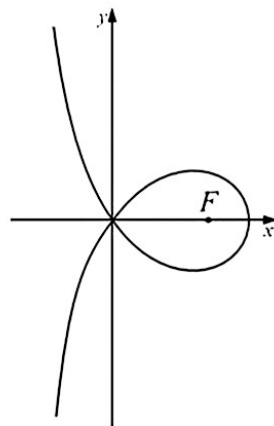
10. 设函数  $f(x) = (x-1)^2(x-4)$ , 则

- A.  $x = 3$  是  $f(x)$  的极小值点                      B. 当  $0 < x < 1$  时,  $f(x) < f(x^2)$   
C. 当  $1 < x < 2$  时,  $-4 < f(2x-1) < 0$                       D. 当  $-1 < x < 0$  时,  $f(2-x) > f(x)$

11. 造型  可以做成美丽的丝带，将其看作图中曲线  $C$  的一部分。已知  $C$  过坐标原点  $O$ , 且  $C$  上的点满足横坐标大于  $-2$ , 到点  $F(2, 0)$

的距离与到定直线  $x = a (a < 0)$  的距离之积为 4, 则

- A.  $a = -2$   
B. 点  $(2\sqrt{2}, 0)$  在  $C$  上  
C.  $C$  在第一象限的点的纵坐标的最大值为 1  
D. 当点  $(x_0, y_0)$  在  $C$  上时,  $y_0 \leq \frac{4}{x_0 + 2}$



三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共计 15 分.

12. 设双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左右焦点分别为  $F_1, F_2$ ，过  $F_2$  作平行于  $y$  轴的直线交  $C$  于  $A, B$  两点，若  $|F_1A| = 13$ ， $|AB| = 10$ ，则  $C$  的离心率为\_\_\_\_\_.

13. 若曲线在点  $(0, 1)$  处的切线也是曲线  $y = \ln(x+1) + a$  的切线，则  $a =$ \_\_\_\_\_.

14. 甲乙两人各有四张卡片，每张卡片上标有一个数字，甲的卡片上分别标有数字 1, 3, 5, 7，乙的卡片上分别标有数字 2, 4, 6, 8. 两人进行四轮比赛，在每轮比赛中，两人各自从自己持有的卡片中随机选一张，并比较所选卡片上的数字大小，数字大的人得 1 分，数字小的人得 0 分，然后各自弃置此轮所选的卡片（弃置的卡片在此后的轮次中不能使用），则四轮比赛后，甲的总得分不小于 2 的概率为\_\_\_\_\_.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分)

记  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ，已知  $\sin C = \sqrt{2} \cos B$ ，  
 $a^2 + b^2 - c^2 = \sqrt{2}ab$ .

(1) 求  $B$ ;

(2) 若  $\triangle ABC$  的面积为  $3 + \sqrt{3}$ ，求  $c$ .

16. (15 分)

已知  $A(0, 3)$  和  $P(3, \frac{3}{2})$  为椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  上两点.

(1) 求  $C$  的离心率;

(2) 若过  $P$  的直线  $l$  交  $C$  于另一点  $B$ ，且  $\triangle ABP$  的面积为 9，求  $l$  的方程.

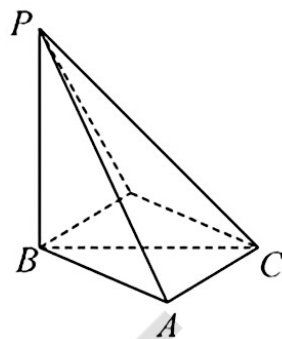
17. (15分)

如图，四棱锥  $P-ABCD$  中， $PA \perp$  底面  $ABCD$ ， $PA = AC = 2$ ， $BC = 1$ ， $AB = \sqrt{3}$ 。

(1) 若  $AD \perp PB$ ，证明： $AD \parallel$  平面  $PBC$ ；

(2) 若  $AD \perp DC$ ，且二面角  $A-CP-D$  的正弦值为  $\frac{\sqrt{42}}{7}$ ，

求  $AD$ 。



18. (17分)

已知函数  $f(x) = \ln \frac{x}{2-x} + ax + b(x-1)^3$ 。

(1) 若  $b = 0$ ，且  $f'(x) \geq 0$ ，求  $a$  的最小值；

(2) 证明：曲线  $y = f(x)$  是中心对称图形；

(3) 若  $f(x) > -2$  当且仅当  $1 < x < 2$ ，求  $b$  的取值范围。

19. (17分)

设  $m$  为正整数，数列  $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$  是公差为  $d \neq 0$  的等差数列，若从中删去两项  $a_i$  和  $a_j$  ( $i < j$ ) 后剩余的  $4m$  项可被平均分为  $m$  组，且每组的 4 个数都能构成等差数列，则称数列  $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$  是  $(i, j)$ -可分数列。

(1) 写出所有的  $(i, j)$ ， $1 \leq i < j \leq 6$ ，使得数列  $a_1, a_2, \dots, a_6$  是  $(i, j)$ -可分数列；

(2) 当  $m \geq 3$  时，证明：数列  $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$  是  $(2, 13)$ -可分数列；

(3) 从  $1, 2, \dots, 4m+2$  中一次任取两个数  $i$  和  $j$  ( $i < j$ )，记数列  $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$

是  $(i, j)$ -可分数列的概率为  $P_m$ ，证明： $P_m > \frac{1}{8}$ 。