成都市2021级高中毕业班第三次诊断性检测

数学(理科)参考答案及评分意见

第Ⅰ卷 (选择题,共60分)

一、选择题:(每小题5分,共60分)

1. D; 2. B; 3. C; 4. D; 5. B; 6. C; 7. A; 8. A; 9. C; 10. C; 11. D; 12. B.

第Ⅱ卷 (非选择题,共90分)

二、填空题:(每小题5分,共20分)

13. $\frac{1}{2}$; 14. $\frac{7}{8}$; 15. $\frac{1}{4}$; 16. $-e^3$.

三、解答题:(共70分)

17. **解:**(Ⅰ)当 $n=1$ 时,$2a_1=S_1+1=a_1+1$,得 $a_1=1$, ……1分

由 $2a_n=S_n+n$,①

当 $n\geqslant 2$ 时,$2a_{n-1}=S_{n-1}+n-1$②, ……2分

①-②得:$2(a_n-a_{n-1})=S_n-S_{n-1}+1=a_n+1$,

整理得:$a_n=2a_{n-1}+1(n\geqslant 2)$, ……4分

所以 $a_n+1=2(a_{n-1}+1)(n\geqslant 2)$,且 $a_1+1=2$, ……5分

∴ $\{a_n+1\}$ 是以2为首项,2为公比的等比数列. ……6分

(Ⅱ)由(Ⅰ)得 $a_n+1=(a_1+1)\cdot 2^{n-1}=2^n$, ……8分

$\therefore b_n=\log_2 2^n=n$,$c_n=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$. ……10分

$\therefore T_n=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}=1-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{n}{n+1}$.

……12分

18. **解:**(Ⅰ)在 $\triangle ADB$ 中,由余弦定理 $DB=\sqrt{AD^2+AB^2-2AD\cdot AB\cdot\cos\angle DAB}=\sqrt{3}$.

$\because AD^2=DB^2+AB^2$,$\therefore DB\perp AB$. ……2分

$\because CD/\!/AB$,$EB\perp CD$,$\therefore EB\perp AB$. ……3分

$\because DB\perp AB$,$EB\cap DB=B$,$\therefore AB\perp$ 平面 EDB. ……4分

又 $AB\subset$ 平面 $ABCD$,

$\therefore$ 平面 $EDB\perp$ 平面 $ABCD$. ……5分

(Ⅱ)由(Ⅰ)易得 $CD\perp$ 平面 EDB,$ED\subset$ 平面 EDB,

$\therefore CD\perp ED$.又 $\because ED\perp AD$,$AD\cap CD=D$,

$\therefore ED\perp$ 平面 $ABCD$.$\because BD\subset$ 平面 $ABCD$,

$\therefore ED\perp BD$.又 $BD\perp DC$, ……7分

如图,以 D 为坐标原点,DB,DC,DE 所在直线分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系

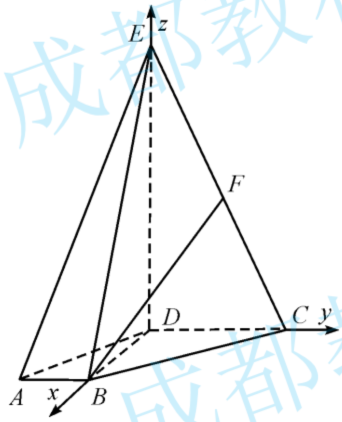
$D-xyz$，则：

$D(0,0,0)$，$B(\sqrt{3},0,0)$，$C(0,2,0)$，

$A(\sqrt{3},-1,0)$，$E(0,0,4\sqrt{2})$，

∵F 是 CE 中点，

∴$F(0,1,2\sqrt{2})$，$\overrightarrow{BF}=(-\sqrt{3},1,2\sqrt{2})$．　　……8 分



设 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$ 为平面 ABE 的一个法向量，

$\overrightarrow{AB}=(0,1,0)$，$\overrightarrow{AE}=(-\sqrt{3},1,4\sqrt{2})$，

$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AE}=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}y=0\\ -\sqrt{3}x+y+4\sqrt{2}z=0\end{cases}$，

令 $x=4\sqrt{2}$ 得 $\boldsymbol{m}=(4\sqrt{2},0,\sqrt{3})$，　　……10 分

设直线 BF 与平面 ABE 所成角大小为 θ，则

$\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{BF}\rangle|=\left|\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BF}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\overrightarrow{BF}|}\right|=\dfrac{\sqrt{70}}{35}$．　　……11 分

所以直线 BF 与平面 ABE 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{70}}{35}$．　　……12 分

19. **解**：(Ⅰ)由题意，样本中 500 名学生寒假期间每天课外阅读平均时长的平均数

$\bar{t}=10\times\dfrac{50}{500}+30\times\dfrac{100}{500}+50\times\dfrac{200}{500}+70\times\dfrac{125}{500}+90\times\dfrac{25}{500}=49$．

所以估计这 500 名学生寒假期间每天课外阅读平均时长的平均数为 49．　　……4 分

(Ⅱ)抽到任意一名学生得 0 分的概率为：$\dfrac{50}{500}=0.1$，

得 1 分的概率为：$\dfrac{100+200}{500}=0.6$，

得 2 分的概率为：$\dfrac{125+25}{500}=0.3$．　　……5 分

由题意，随机变量 X 的可能取值为 0，1，2，3，4，

$P(X=0)=0.1\times0.1=0.01$，$P(X=1)=2\times0.1\times0.6=0.12$，

$P(X=2)=2\times0.1\times0.3+0.6\times0.6=0.42$，

$P(X=3)=2\times0.6\times0.3=0.36$，$P(X=4)=0.3\times0.3=0.09$．　　……10 分

∴ X 的分布列为：

X	0	1	2	3	4
P	0.01	0.12	0.42	0.36	0.09

X 的数学期望 $E(X)=0\times0.01+1\times0.12+2\times0.42+3\times0.36+4\times0.09=2.4$．

……12 分

20. **解**：(Ⅰ)当 $a=2$ 时，$f(x)=x\ln x-2\sqrt{x}+2(x>0)$，

$f'(x)=1+\ln x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$，　　……1 分

注意到函数 $y=\ln x$ 与 $y=-\frac{1}{\sqrt{x}}$ 均在 $(0,+\infty)$ 单调递增，

$\therefore f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. ……3 分

由 $f'(1)=0$，得

$x\in(0,1)$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减；

$x\in(1,+\infty)$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

综上，$f(x)$的单增区间为$(1,+\infty)$，单减区间为$(0,1)$. ……5 分

(Ⅱ)令 $\sqrt{x}=t>0$，

设函数 $g(t)=2t^2\ln t-at+a$，$g(1)=0$.

函数 $f(x)$ 有两个零点等价于函数 $g(t)$ 有两个零点.

①当 $a\leqslant 0$ 时，$g(t)=2t^2\ln t-at+a=2t^2\ln t-a(t-1)$，

当 $t>1$ 时，$g(t)>0$；当 $0<t<1$ 时，$g(t)<0$；当 $t=1$ 时，$g(t)=0$.

$\therefore$ $g(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上只有一个零点，故 $a\leqslant 0$ 不合题意. ……7 分

②当 $a>0$ 时，

$g'(t)=2t(2\ln t+1)-a$，令 $h(t)=2t(2\ln t+1)-a$，

$h'(t)=2(2\ln t+3)$，令 $h'(t)=0$ 得 $t=\frac{1}{e^{\frac{3}{2}}}$，

$h(t)$ 在 $(0,\frac{1}{e^{\frac{3}{2}}})$ 上单调递减，$(\frac{1}{e^{\frac{3}{2}}},+\infty)$ 上单调递增， ……8 分

$\therefore h(t)_{\min}=h(\frac{1}{e^{\frac{3}{2}}})=\frac{-4}{e^{\frac{3}{2}}}-a$.

$\because$ $\frac{-4}{e^{\frac{3}{2}}}-a<0$，$t\to 0^+$时，$h(t)\to -a<0$，$t\to+\infty$ 时，$h(t)\to+\infty$.

由零点存在定理得存在 $t_0\in(\frac{1}{e^{\frac{3}{2}}},+\infty)$，使得 $h(t_0)=0$，

$\therefore t\in(0,t_0)$ 时，$g'(t)<0$，$g(t)$ 单调递减；

$t\in(t_0,+\infty)$ 时，$g'(t)>0$，$g(t)$ 单调递增. ……9 分

由 $t\to 0^+$时，$g(t)\to a>0$，$t\to+\infty$ 时，$g(t)\to+\infty$，且 $g(1)=0$，

故当 $t_0=1$ 时，函数 $g(t)$ 有且仅有一个零点，不合题意；

当 $t_0\neq 1$ 时，$g(t)_{\min}=g(t_0)<g(1)=0$，

此时 $g(t)$ 在 $(0,t_0)$，$(t_0,+\infty)$ 上各有一个零点. 满足题意. ……11 分

由 $h(t)$ 在 $(\frac{1}{e^{\frac{3}{2}}},+\infty)$ 上单调递增，且 $h(1)=2-a$.

故当 $a=2$ 时，$t_0=1$，不合题意；

当 $a\in(0,2)\cup(2,+\infty)$ 时，$t_0\neq 1$，满足题意.

综上，a 的取值范围为 $(0,2)\cup(2,+\infty)$. ……12 分

21. **解**：(Ⅰ) $\because$ $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore$ $\frac{b}{a}=\sqrt{1-(\frac{c}{a})^2}=\frac{1}{2}$，即 $a=2b$.

$\because l$ 过坐标原点 O，$\therefore$ 直线 l 的方程为 $y=\frac{b}{a}x=\frac{1}{2}x$. ……2 分

由 $\begin{cases} y=\frac{1}{2}x \\ \frac{x^2}{4b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$ 消去 y 得：$x^2=2b^2$，$\therefore y^2=\frac{1}{4}x^2=\frac{1}{2}b^2$.

$\because |AB|=\sqrt{10}$，$\therefore \frac{|AB|}{2}=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\frac{5b^2}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$.

$\therefore b^2=1$. ……4 分

$\therefore a^2=4$.

故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ……5 分

(Ⅱ)假设存在定点 $Q(2m,m)$，$m\in[0,1]$，由题意，l 斜率存在，

设直线 l：$y-1=k(x-2)$，即：$y=kx+1-2k$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases} y=kx+1-2k, \\ x^2+4y^2=4 \end{cases}$ 消去 y 得 $(4k^2+1)x^2+8k(1-2k)x+16k^2-16k=0$.

其中 $\Delta>0$，

$x_1+x_2=\frac{8k(2k-1)}{4k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{16k^2-16k}{4k^2+1}$. ……6 分

$\therefore k_{QA}=\frac{y_1-m}{x_1-2m}$，$k_{QB}=\frac{y_2-m}{x_2-2m}$.

$\therefore k_{QA}\cdot k_{QB}=\frac{y_1-m}{x_1-2m}\cdot\frac{y_2-m}{x_2-2m}=\frac{kx_1+1-2k-m}{x_1-2m}\cdot\frac{kx_2+1-2k-m}{x_2-2m}$

$=\frac{k^2x_1x_2+(1-m-2k)k(x_1+x_2)+(1-m-2k)^2}{x_1x_2-2m(x_1+x_2)+4m^2}$ ……8 分

$=\frac{k^2\cdot\frac{16k^2-16k}{4k^2+1}+(1-m-2k)k\cdot\frac{8k(2k-1)}{4k^2+1}+(1-m-2k)^2}{\frac{16k^2-16k}{4k^2+1}-2m\cdot\frac{8k(2k-1)}{4k^2+1}+4m^2}$

$=\frac{k^2(16k^2-16k)+(1-m-2k)k(16k^2-8k)+(1-m-2k)^2(4k^2+1)}{16k^2-16k-16mk(2k-1)+4m^2(4k^2+1)}$

$=\frac{4m^2k^2-4(1-m)k+(1-m)^2}{16(1-m)^2k^2-16(1-m)k+4m^2}$. ……10 分

$\therefore$ 当 $m^2=(1-m)^2$，即 $m=\frac{1}{2}$ 时，$k_{QA}\cdot k_{QB}=\frac{1}{4}$ 恒成立. ……11 分

$\therefore$ 存在定点 $Q(1,\frac{1}{2})$，使得直线 QA 与直线 QB 的斜率之积为定值 $\frac{1}{4}$. ……12 分

22. **解**：(Ⅰ)由曲线 C 的参数方程 $\begin{cases} x=mt^2, \\ y=mt \end{cases}$ (t 为参数)，

消去参数 t 可得曲线 C 的普通方程为 $y^2=mx$. ……2 分

由直线 l 的极坐标方程得：$\frac{\sqrt{2}}{2}(\rho\cos\theta-\rho\sin\theta)-2\sqrt{2}=0$. ……3 分

$\because x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$,

$\therefore$ 直线 l 的直角坐标方程为 $x-y-4=0$. ……5 分

(Ⅱ)直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=6+\frac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y=2+\frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数). ……6 分

与曲线 C：$y^2=mx$ 联立得：$t^2+(4\sqrt{2}-\sqrt{2}m)t+8-12m=0$，$\Delta>0$，

设 A,B 两点对应的参数分别为 t_1,t_2，则 $t_1+t_2=\sqrt{2}m-4\sqrt{2}$，$t_1t_2=8-12m$.

……7 分

$\because M$ 为线段 AB 的三等分点，$\therefore t_1=-2t_2$. ……8 分

代入 $t_1+t_2=\sqrt{2}m-4\sqrt{2}$ 可得 $t_1=2\sqrt{2}(m-4)$，$t_2=-\sqrt{2}(m-4)$.

代入 $t_1t_2=8-12m$，可得 $-4(m-4)^2=8-12m$.

即 $m^2-11m+18=0$，解得 $m=2$ 或 $m=9$ 均满足 $\Delta>0$.

故 m 的值为 2 或 9. ……10 分

23. **解**：(Ⅰ)当 $x\geqslant 2m$ 时，$x-3m\geqslant 2x$，解得 $2m\leqslant x\leqslant -3m$； ……2 分

当 $x<2m$ 时，$m-x\geqslant 2x$，$x\leqslant\frac{m}{3}$，解得 $x<2m$. ……4 分

综上，所求不等式的解集为 $\{x \mid x\leqslant -3m\}$. ……5 分

(Ⅱ)由题意，当 $m=-2$ 时，$f(x)$ 的最小值为 2. ……6 分

$\therefore a^2+b^2+c^2=2$.

$$\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{c^2+a^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}=\frac{2-(b^2+c^2)}{b^2+c^2}+\frac{2-(c^2+a^2)}{c^2+a^2}+\frac{2-(a^2+b^2)}{a^2+b^2}$$

$$=\frac{2}{b^2+c^2}+\frac{2}{c^2+a^2}+\frac{2}{a^2+b^2}-3$$ ……8 分

$$=\frac{[(b^2+c^2)+(c^2+a^2)+(a^2+b^2)]}{2}\left(\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}+\frac{1}{a^2+b^2}\right)-3$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\left(\sqrt{b^2+c^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}}+\sqrt{c^2+a^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{c^2+a^2}}+\sqrt{a^2+b^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2-3=\frac{3}{2}.$$

当且仅当 $a^2=b^2=c^2=\frac{2}{3}$ 时等号成立，不等式得证. ……10 分