达州市普通高中 2024 届第二次诊断性测试

理科数学参考答案

一、选择题：

1. D　2. C　3.B　4.A　5.B　6.C　7.B　8. C　9.C　10.D　11.C　12. A

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．0.6　　14．$\frac{3}{4}$　　15．$\frac{7\pi}{12}$　　16．3

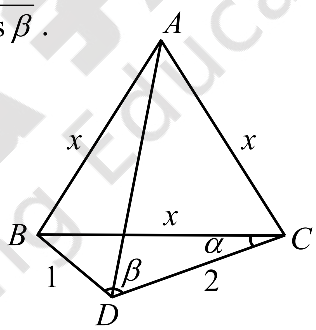
16 题提示：因 $a^2+b^2+c^2=2\sqrt{3}bc\sin A$，所以在△$ABC$ 中由正弦定理得

$b^2+c^2-2bc\cos A+b^2+c^2=2\sqrt{3}bc\sin A$，$\therefore \cos A+\sqrt{3}\sin A=\frac{b^2+c^2}{2bc}$，

$\therefore \sin(A+\frac{\pi}{6})\geqslant 1$，由于 $0<A<\pi$，$\therefore A=\frac{\pi}{3}$，且 $b=c$，即△ABC 为正三角形.

【方法一】如图，设 $AB=x$，$\angle BCD=\alpha$，$\angle BDC=\beta$．在△BCD 中，由余弦定理得

$x^2=1+4-4\cos\beta$，$1=x^2+4-4x\cos\alpha$，$\therefore x=\sqrt{5-4\cos\beta}$.



在△BCD 中，由正弦定理得 $\sin\alpha=\frac{\sin\beta}{x}$，

$\therefore \sin\alpha=\frac{\sin\beta}{\sqrt{5-4\cos\beta}}$，$\therefore \cos\alpha=\frac{2-\cos\beta}{\sqrt{5-4\cos\beta}}$.

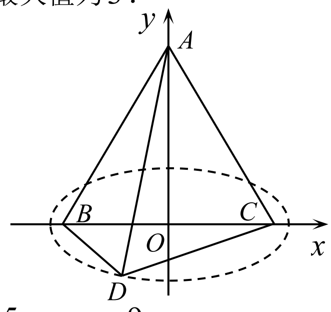
在△ACD 中，由余弦定理得

$AD^2=x^2+4-4x\cos(\alpha+\frac{\pi}{3})=1+4x\cos\alpha-4x\cos(\alpha+\frac{\pi}{3})$

$=1+2x(\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha)=1+2\sqrt{5-4\cos\beta}(\frac{2-\cos\beta}{\sqrt{5-4\cos\beta}}+\sqrt{3}\cdot\frac{\sin\beta}{\sqrt{5-4\cos\beta}})$

$=5+4\sin(\beta-\frac{\pi}{6})\leqslant 9$，等号在 $\beta=\frac{2\pi}{3}$ 时成立．所以 AD 的最大值为 3.

【方法二】以 BC 为 x 轴，以 BC 中垂线为 y 轴建立如图所示的平面直角坐标系．设 $|BC|=2c$，$\because |DC|=2|BD|=2$，$\therefore$ 点 D 在以 B，C 为焦点，以 3 为长轴的椭圆上，这个椭圆方程为 $\frac{x^2}{\frac{9}{4}}+\frac{y^2}{\frac{9}{4}-c^2}=1$.



设 $D(x_0, y_0)(y_0<0)$，则 $\frac{3}{2}+\frac{c}{\frac{3}{2}}x_0=1$，$\therefore x_0=-\frac{3}{4c}$，$y_0^2=\frac{5}{2}-c^2-\frac{9}{16c^2}$.

由于 $A(0,\sqrt{3}c)$，所以 $|AD|^2=x_0^2+(y_0-\sqrt{3}c)^2=2(c^2+\sqrt{3}\sqrt{\frac{5}{2}c^2-c^4-\frac{9}{16}})+\frac{5}{2}$.

设 $f(x)=x+\sqrt{3}\sqrt{\frac{5}{2}x-x^2-\frac{9}{16}}$，$\therefore f'(x)=1+\dfrac{\sqrt{3}(\frac{5}{4}-x)}{\sqrt{\frac{5}{2}x-x^2-\frac{9}{16}}}$．由 $f'(x)=0$ 得 $x=\frac{3}{4}$，

或 $x=\frac{7}{4}$．经验证当 $x=\frac{7}{4}$ 即 $c^2=\frac{7}{4}$ 时，$|AD|^2$ 最大，且 $|AD|_{max}=3$．

三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．解：(1)设等差数列 $\{a_n\}$ 公差为 d，$\because S_4=S_5$，$\therefore a_5=0$，$8+4d=0$，$\therefore d=-2$，

$\therefore S_n=8n-\frac{n(n-1)}{2}(-2)=9n-n^2$．

(2) $b_1=\frac{S_4}{5}=4$，$b_2=-a_6=-8+10=2$，$\therefore$数列 $\{b_n\}$ 公比为 $\frac{1}{2}$，

$\therefore b_n=4(\frac{1}{2})^{n-1}=2^{3-n}$．

18．解：(1) $\because$ $k=\frac{100\times(20\times20-20\times40)^2}{40\times60\times40\times60}=\frac{25}{9}\approx2.778<3.841$

$\therefore$没有95%的把握认为入学测试成绩优秀与使用智能辅导系统相关．

(2)$\because$使用分层抽样，$\therefore$5 人中 2 人成绩优秀，3 人成绩不优秀

$\therefore P(X=0)=\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{3}{10}$，$P(X=1)=\frac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}=\frac{3}{5}$，$P(X=2)=\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{1}{10}$

$\therefore$分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$

$\therefore E(X)=0\times\frac{3}{10}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{1}{10}=\frac{4}{5}$．

19．解：(1) 设 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$

$\because \begin{cases} y^2=2px, \\ y=k(x-p) \end{cases}$，$ky^2-2py-2p^2k=0$，$\therefore y_1+y_2=\frac{2p}{k}$，$y_m=\frac{p}{k}$

$\because ky_m=2$，$\therefore p=2$，$\therefore \Gamma$ 的方程为 $y^2=4x$．

(2) $\because \begin{cases} y^2=4x, \\ y=k(x-2) \end{cases}$，$ky^2-4y-8k=0$，$\therefore y_1+y_2=\frac{4}{k}$，$y_1y_2=-8$

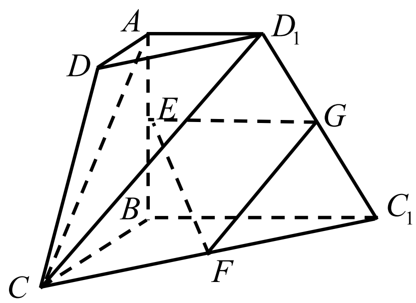
$\because S_{\triangle BOC}$，$S_{\triangle COM}$，$S_{\triangle MOA}$ 成等差数列，$\therefore |y_2|$，$|y_m|$，$|y_1|-|y_m|$ 成等差数列

$\therefore 2|y_m|=|y_2|+|y_1|-|y_m|$

$\therefore 3|y_m|=|y_1|+|y_2|$，$3|y_m|=|y_1-y_2|$

$\therefore 9y_m^2=(y_1+y_2)^2-4y_1y_2$，$9(\frac{2}{k})^2=(\frac{4}{k})^2+32$

$\therefore\ k=\pm\frac{\sqrt{10}}{4}$．



20．(1)证明：设 D_1C_1 中点为 G，连接 FG，EG

$\because FG$ 为 $\triangle CC_1D_1$ 中位线，$FG\,/\!/\,CD_1$，

$CD_1\subset$平面CD_1A，$FG\not\subset$平面CD_1A，

$\therefore FG//$平面CD_1A

$\because EG$为梯形ABC_1D_1中位线，$EG// AD_1$，

$AD_1\subset$平面CD_1A，$EG\not\subset$平面CD_1A

$\therefore EG//$平面CD_1A，

$\because EG\cap FG=G$，$FG\subset$平面EFG，$EG\subset$平面EFG，

$\therefore$平面$EFG//$平面CD_1A，

$\because EF\subset$平面EFG，

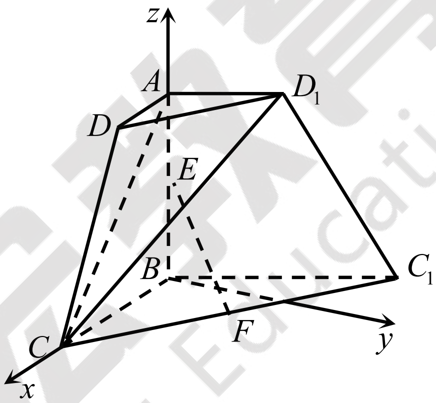
$\therefore EF//$平面CD_1A.

(2) 解：如图建立空间直角坐标系，

$\because \angle DAD_1=\angle CBC_1=\theta\ (0<\theta<\pi)$，不妨设$|AB|=|BC|=2|AD|=2$

$\therefore B(0，0，0)$，$C(2，0，0)$，$A(0，0，2)$

$C_1(2\cos\theta，2\sin\theta，0)$，$D_1(\cos\theta，\sin\theta，2)$



设平面AD_1C_1的法向量为$\boldsymbol{n}_1=(x_1，y_1，z_1)$

$\therefore\begin{cases}\overrightarrow{BA}\cdot\boldsymbol{n}_1=0\\ \overrightarrow{BD_1}\cdot\boldsymbol{n}_1=0\end{cases}$，$\begin{cases}2z_1=0\\ x_1\cos\theta+y_1\sin\theta+2z_1=0\end{cases}$

不妨取$x_1=-\sin\theta$，$\therefore \boldsymbol{n}_1=(-\sin\theta，\cos\theta，0)$

设平面AD_1C的法向量为$\boldsymbol{n}_2=(x_2，y_2，z_2)$

$\therefore\begin{cases}\overrightarrow{CA}\cdot\boldsymbol{n}_2=0\\ \overrightarrow{CD_1}\cdot\boldsymbol{n}_2=0\end{cases}$，$\begin{cases}-2x_2+2z_2=0\\ x_2(\cos\theta-2)+y_2\sin\theta+2z_2=0\end{cases}$

不妨取$x_2=1$，$\therefore \boldsymbol{n}_2=(1，-\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}，1)$

$$\therefore \cos<\boldsymbol{n}_1，\boldsymbol{n}_2>=\frac{-\sin\theta-\dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta}}{\sqrt{1+(\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta})^2+1}}=-\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2\theta}}$$

设二面角$C-AD_1-C_1$平面角为α，$\therefore \cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{1+\sin^2\theta}}$

$\therefore \theta=\dfrac{\pi}{2}$时，二面角$C-AD_1-C_1$的余弦最小值为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

21．解：(1)$\because f'(x)=-a\sin x+x$，$\therefore -a\sin x+x\geqslant 0$，$x\in[0，\dfrac{\pi}{2}]$恒成立.

设$g(x)=-a\sin x+x$，$x\in[0，\dfrac{\pi}{2}]$，$\therefore g'(x)=-a\cos x+1$.

当$a\leqslant 0$时，$x\in[0，\dfrac{\pi}{2}]$，$g'(x)>0$，$g(x)$为单调递增，

$\therefore g(x)\geqslant g(0)=0$满足题意；

当$a>0$时，$x\in[0，\dfrac{\pi}{2}]$，$g'(x)\in[1-a，1]$，

$1-a\geqslant 0$时，即$0<a\leqslant 1$时，$x\in[0,\ \frac{\pi}{2}]$，$g'(x)>0$，$g(x)$为单调递增，

$\therefore g(x)\geqslant g(0)=0$满足题意；

$1-a<0$时，即$a>1$时，$\exists x_0\in(0,\ \frac{\pi}{2})$，使$g'(x_0)=0$，$\therefore x\in[0,\ x_0]$，$g'(x)\leqslant 0$，

$g(x)$为单调递减，$\therefore g(x_0)<g(0)=0$，与$g(x)\geqslant 0$在$x\in[0,\ \frac{\pi}{2}]$上恒成立矛盾；

综上可得$a\leqslant 1$.

(2) 由(1)知$a=1$时，$f(x)=\cos x+\frac{x^2}{2}$在$[0,\ \frac{\pi}{2}]$上单调递增，$\therefore f(x)\geqslant f(0)=1$

$\therefore \cos x+\frac{x^2}{2}\geqslant 1$，$\therefore \cos x>1-\frac{x^2}{2}$，$x\in(0,\ \sqrt{2})$时，$\cos x>1-\frac{x^2}{2}>0$，

由(1)知$a=1$时，$0<\sin x<x$，$x\in(0,\ \sqrt{2})$时，$\frac{1}{\sin x}>\frac{1}{x}>0$，

$\therefore \frac{1}{\tan x}>\frac{1-\frac{x^2}{2}}{x}$，$x\in(0,\ \sqrt{2})$，即$\frac{x}{\tan x}>1-\frac{x^2}{2}$，$x\in(0,\ \sqrt{2})$

$\therefore$令$x=\frac{1}{n}$，$n\in\mathbf{N}^*$，

$\therefore \frac{1}{n\tan\frac{1}{n}}>1-\frac{1}{2n^2}>1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{n^2-\frac{1}{4}}=1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{(n-\frac{1}{2})(n+\frac{1}{2})}=1-(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$

$\therefore \frac{1}{\tan 1}+\frac{1}{2\tan\frac{1}{2}}+\frac{1}{3\tan\frac{1}{3}}+\cdots+\frac{1}{n\tan\frac{1}{n}}>n-(1-\frac{1}{2n+1})=\frac{2n^2-n}{2n+1}$

$\therefore$原不等式得证.

22．解：(1) $C_1:x^2+(y-2)^2=4$

C_2：$\because \rho(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=4\cos\theta-4\sin\theta$，

$\therefore \rho^2\cos^2\theta-\rho^2\sin^2\theta=4\rho\cos\theta-4\rho\sin\theta$

$\because \rho\cos\theta=x$，$\rho\sin\theta=y$，$\therefore x^2-y^2=4x-4y$，$(x+y)(x-y)-4(x-y)=0$

$\therefore (x-y)(x+y-4)=0$，$\therefore C_2$方程为$x-y=0$和$x+y-4=0$.

(2) $\because \begin{cases}x^2+(y-2)^2=4\\x-y=0\end{cases}$解得$\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$，$\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}$；

$\because \begin{cases}x^2+(y-2)^2=4\\x+y-4=0\end{cases}$解得$\begin{cases}x=0\\y=4\end{cases}$，$\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}$.

$\therefore$以曲线C_1与曲线C_2的公共点为顶点的多边形为三角形，其面积为4.

23．解：(1) $\because f(x)=|x+3|-|2x-4|=\begin{cases}x-7, & x\leqslant -3,\\3x-1, & -3<x\leqslant 2,\\7-x, & x>2.\end{cases}$ $\therefore f_{\max}(x)=5$，

$\therefore 5\geqslant|m-1|+m$，解得$m\leqslant 3$．所以$m$的取值范围为$(-\infty,\ 3]$.

(2)由(1)可得 $n=3$， $3a+b+2c=3$

$\therefore 5a^2+b^2+c^2+2ab=(a+b)^2+4a^2+c^2$

$$=[(a+b)^2+4a^2+c^2](1^2+1^2+2^2)\frac{1}{6}$$

$$\geqslant\frac{1}{6}(3a+b+2c)^2=\frac{3}{2}$$

当且仅当 $4a=4b=c=1$ 时取等号，即 $5a^2+b^2+c^2+2ab$ 最小值为 $\frac{3}{2}$.