

## 成都石室中学 2023-2024 年度下期高 2024 届三诊模拟

## 数学试题（文）参考答案

（总分：150 分，时间：120 分钟）

## 第 I 卷（共 60 分）

一、选择题（本题共 12 道小题，每小题 5 分，共 60 分）

1. B 【解析】由  $M \cap \{a, b, c\} = \{a\}$  可得：  $\{a\} \subseteq M$ ，  $b, c \notin M$ 。又因为  $M \subseteq \{a, b, c, d\}$ ，所以  $M = \{a\}$  或  $M = \{a, d\}$ 。故选：B2. C 【解析】“ $|\overline{CA} + \overline{CB}| < |\overline{AB}|$ ”等价于“ $|\overline{CA} + \overline{CB}| < |\overline{CB} - \overline{CA}|$ ”，所以  $|\overline{CA} + \overline{CB}|^2 = \overline{CA}^2 + 2\overline{CA} \cdot \overline{CB} + \overline{CB}^2 < |\overline{CB} - \overline{CA}|^2 = \overline{CA}^2 - 2\overline{CA} \cdot \overline{CB} + \overline{CB}^2$ 从而  $\overline{CA} \cdot \overline{CB} < 0$ ，显然 A，B，C 不共线，原条件等价于  $\angle ACB$  是钝角。故选：C。

3. C 【解析】根据题意，依次分析选项：

对于 A，甲得分的极差为 31， $30 + x - 8 = 31$ ，解得：  $x = 9$ ，A 正确；对于 B，乙的平均数为  $\overline{x}_乙 = \frac{1}{5} \times (12 + 25 + 26 + 20 + y + 31) = 24$ ，解得  $y = 6$ ，B 正确；

对于 C，乙的数据为：12、25、26、26、31，其中位数是 26，C 错误；

对于 D，甲的平均数  $\overline{x}_甲 = \frac{1}{5} \times (8 + 13 + 28 + 32 + 39) = 24$ ，与乙的平均数相同，但根据茎叶图可得乙得分比较集中，

则乙得分的方差小于甲得分的方差，D 正确；故选：C。

4. D 【解析】因为  $f(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^n}$ ，所以  $f(k) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^k}$ ，共  $2^k$  项，则  $f(k+1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}}$  共  $2^{k+1}$  项，所以  $f(k+1)$  比  $f(k)$  共增加了  $2^{k+1} - 2^k = 2^k$  项，故

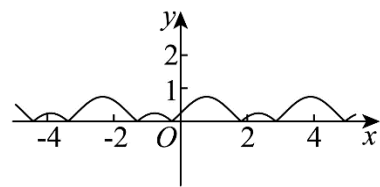
选：D

5. B 【解析】由函数  $f(x) = \left| \sin x \cos x + \frac{1}{4} \right| = \left| \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{4} \right| = \frac{1}{4} \cdot |2 \sin 2x + 1|$ ，由此可作出  $f(x)$  的函数图象，如图所示，对于 A 中，由  $f(\pi - x) = \frac{1}{4} \cdot |2 \sin 2(\pi - x) + 1| = \frac{1}{4} \cdot |-2 \sin 2x + 1| = \frac{1}{4} \cdot |2 \sin 2x - 1| \neq f(x)$ ，所以  $f(x)$  关于直线  $x = \frac{\pi}{2}$  不对称，所以 A 错误；对于 B 中，由  $f(x + \pi) = \frac{1}{4} \cdot |2 \sin 2(x + \pi) + 1| = \frac{1}{4} \cdot |2 \sin 2x + 1| = f(x)$ ，所以 B 正确；

对于 C 中，由函数  $f(x)$  图象可知， $f(x)$  不存在对称中心，所以 C 错误；

对于 D 中，因为  $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{4}$ ， $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4}$ ， $f\left(\frac{\pi}{4}\right) > f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ，

所以函数  $f(x)$  在  $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$  上不是单调递增函数，所以 D 错误。故选：B。



6. C 【解析】 $\sum_{n=k}^{80} P_{10}(n) = P_{10}(k) + P_{10}(k+1) + \dots + P_{10}(80) = \lg \frac{k+1}{k} + \lg \frac{k+2}{k+1} + \dots + \lg \frac{81}{80} = \lg \frac{81}{k}$ ，

而  $\frac{\log_4 81}{1 + \log_2 5} = \frac{\frac{\lg 81}{\lg 4}}{1 + \frac{\lg 5}{\lg 2}} = \frac{\frac{4 \lg 3}{2 \lg 2}}{1 + \frac{\lg 5}{\lg 2}} = 2 \lg 3 = \lg 9$ ，故  $k = 9$ 。故选：C。

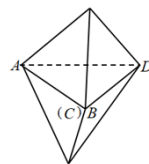
7. D 【解析】由  $f(x) = x^2 + 2 \ln x$ ，则  $f'(x) = 2x + \frac{2}{x}$ ，则  $f'(x_1) = 2x_1 + \frac{2}{x_1}$ ， $f'(x_2) = 2x_2 + \frac{2}{x_2}$ ，

依题意可得  $2x_1 + \frac{2}{x_1} = 2x_2 + \frac{2}{x_2}$  且  $x_1 > 0$ 、 $x_2 > 0$ 、 $x_1 \neq x_2$ ，所以  $x_1 x_2 = 1$ ，所以  $x_1 + x_2 > 2\sqrt{x_1 x_2} = 2$ ，

经验证，当  $x_1$ 、 $x_2$  分别取 3、 $\frac{1}{3}$  时  $x_1 + x_2 = \frac{10}{3}$  满足题意。故选：D

8. B 【解析】将平面展开图还原为直观图，可得两个三棱锥拼接的六面体，它们共一个底

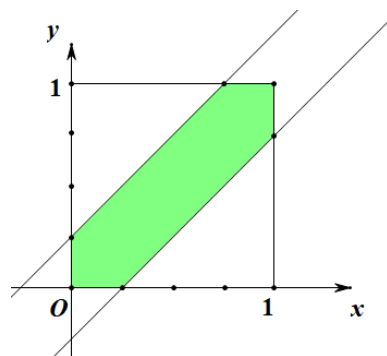
，且 B、C 两点重合，所以 AB 与 CD 相交， 故选：B



9. C 【解析】设甲船到达泊位的时间为  $x$ ，乙船到达泊位的时间为  $y$ ，则  $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$ ，

这两艘船中至少有一艘在停靠泊位时必须等待，则  $|x - y| \leq \frac{1}{4}$ ，

画出不等式组  $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ |x - y| \leq \frac{1}{4} \end{cases}$  表示的平面区域，如图中的阴影部分，



$$S_{\text{阴影}} = 1 - \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times 2 = \frac{7}{16}$$

则这两艘船中至少有一艘在停靠泊位时必须等待的概率为  $P = \frac{S_{\text{阴影}}}{S} = \frac{7}{16}$ 。故选：C

10. D 【解析】由于向量  $\overrightarrow{OC} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$ ，且  $m - n - 4 = 0$ ，则点 C 的轨迹为  $y = 3(x+4)$ ，

与双曲线其中一条渐行线  $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x$ ，联立  $\begin{cases} y = \frac{\sqrt{2}}{2}x \\ y = 3(x+4) \end{cases}$ ，得  $y_Q = -\frac{12+36\sqrt{2}}{17}$ ，同理得  $y_P = \frac{36\sqrt{2}-12}{17}$ ，

因此  $\frac{S_{\Delta POF}}{S_{\Delta QOF}} = \left| \frac{y_P}{y_Q} \right| = \frac{36\sqrt{2}-12}{36\sqrt{2}+12} = \frac{19-6\sqrt{2}}{17}$ . 故选：D

11. C 【详解】由圆  $C: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$  可得圆  $C$  的极坐标方程为  $(\rho \cos \theta - 1)^2 + (\rho \sin \theta - 1)^2 = 1$ ，

化简得到  $\rho^2 - (2 \cos \theta + 2 \sin \theta) \rho + 1 = 0$ ，联立方程组  $\begin{cases} \rho^2 - (2 \cos \theta + 2 \sin \theta) \rho + 1 = 0 \\ \theta = \alpha \end{cases}$ ，

得到方程  $\rho^2 - (2 \cos \alpha + 2 \sin \alpha) \rho + 1 = 0$ ，

则  $L(\alpha) = |\rho_1 - \rho_2| = \sqrt{(\rho_1 + \rho_2)^2 - 4\rho_1\rho_2} = 2\sqrt{\sin 2\alpha}$ ， 故选：C.

12. B 【解析】画出不等式组  $\begin{cases} 2x-3y+10 > 0 \\ x+2y-9 > 0 \\ 3x-y-6 < 0 \end{cases}$  表示的平面区域，如图所示， $A(1,4)$ ， $B(3,3)$ ， $C(4,6)$ ，

由  $3x+a(2y-4ex)(\ln y - \ln x) = 0$  知  $a > 0$ ，并可转化为  $-\frac{3}{a} = 2\left(\frac{y}{x} - 2e\right) \ln \frac{y}{x}$ ，

设  $t = \frac{y}{x}$ ，根据可行域可知  $1 < t < 4$ ， $-\frac{3}{a} = 2(t-2e) \ln t$ ，

设  $f(t) = 2(t-2e) \ln t$ ， $(1 < t < 4)$ ，

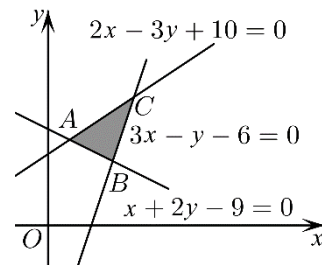
则  $f'(t) = 2 \ln t + 2(t-2e) \cdot \frac{1}{t} = 2 \ln t + 2 - \frac{4e}{t}$ ， $f''(t) = \frac{2}{t} + \frac{4e}{t^2} = \frac{2t+4e}{t^2}$ ，

因为  $1 < t < 4$ ，所以  $f''(t) > 0$  恒成立，则  $f'(t)$  单调递增，且  $f'(e) = 0$ ，

所以令  $f'(t) < 0$ ，得  $t \in (1, e)$ ，则  $f(t)$  在  $t \in (1, e)$  时单调递减；令  $f'(t) > 0$ ，得  $t \in (e, 4)$ ，则  $f(t)$  在  $t \in (e, 4)$

时单调递增，又  $f(1) = 0$ ， $f(e) = -2e$ ， $f(4) = 2(4-2e) \ln 4 = 4(2-e) \ln 4 < 0$ ，

所以  $f(x) \in [-2e, 0)$ ，所以  $-2e \leq -\frac{3}{a} < 0$ ，解得  $a \geq \frac{3}{2e}$ ， 故选：B.



## 第 II 卷 (共 90 分)

二、填空题 (本题共 4 道小题，每小题 5 分，共 20 分)

13.  $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  【解析】因为  $\bar{z} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ，所以  $\bar{z} \cdot z^2 = (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) \cdot (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) \cdot (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ . 故答案

为： $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ .

14.  $\pm 6$  【解析】因为  $a$  是 1, 2 的等差中项，所以  $a = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$ ，因为  $b$  是 1, 16 的等比中项，所以  $b^2 = 1 \times 16 = 16$ ， $b = \pm 4$ ，所以  $ab = \pm 6$ . 故答案为： $\pm 6$ .

15. 2167 【解析】令  $x=5, y=2$  即可求出  $f(3)=4$ ，

令  $x=2, y=5$  即可求出  $f(4)=7$ ，

$$f(x) = 3f\left(\frac{x+2y}{3}\right) - 2f(y), \quad f(6) = 3f\left(\frac{6+2 \times 3}{3}\right) - 2f(3) = 3f(4) - 2f(3) = 13$$

结合  $f(2)=1, f(3)=4, f(4)=7, f(5)=10, f(6)=13$  可猜想  $f(n) = 3(n-1) - 2 = 3n - 5$ .

下面用数学归纳法证明：

当  $n \leq 6 (n \in \mathbb{N}^*)$  时，由上述知  $f(n) = 3n - 5$  成立.

假设当  $n \leq k (n, k \in \mathbb{N}^*)$  时有  $f(n) = 3n - 5$ ，

$$\text{则当 } n = k+1 \text{ 时，不妨设 } k \geq 6, \quad f(k+1) = 3f\left(\frac{(k+1)+2(k-5)}{3}\right) - 2f(k-5) = 3f(k-3) - 2f(k-5)$$

$$= 3(3(k-3)-5) - 2(3(k-5)-5) = 3(k+1) - 5.$$

所以  $f(n) = 3n - 5$  成立，所以  $f(724) = 3 \times 724 - 5 = 2167$ .

故答案为：2167.

16.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  【解析】由教材章头图知识知道，用平面截对接圆锥所得截面边缘曲线是圆锥曲线. 对于本题，如图，水面到达杯底（底面圆“最高处”）的瞬间，水面边缘曲线是椭圆  $O$ ，作纸杯（圆台）的与水面垂直的轴截面  $ABCD$ ，则  $AB=6, CD=8, BC=12$ .  $BD$  是椭圆的长轴， $MN$  是椭圆的短轴.  $O_1O_2$  是圆台的轴线，作  $BH \perp CD$  于  $H$ ，则

$$O_1O_2 = BH = \sqrt{BC^2 - (O_1C - O_2B)^2} = \sqrt{12^2 - 1^2} = \sqrt{143},$$

$$BD = \sqrt{DH^2 + BH^2} = \sqrt{(8-1)^2 + (\sqrt{143})^2} = \sqrt{192} = 8\sqrt{3},$$

记  $BD$  与  $O_1O_2$  的交点为  $F$ ,  $O_1O_2$  的中点为  $E$ , 则  $OE \perp O_1O_2$ ,

$$FO_1 : FO_2 = O_1D : O_2B = 4 : 3, FO_2 = \frac{3}{7}O_1O_2,$$

$$EF = EO_2 - FO_2 = \frac{1}{2}O_1O_2 - \frac{3}{7}O_1O_2 = \frac{1}{14}O_1O_2,$$

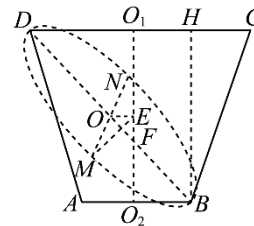
$$OE : O_2B = EF : FO_2 = \frac{O_1O_2}{14} : \frac{3O_1O_2}{7} = 1 : 6, OE = \frac{1}{6}O_2B = \frac{1}{2},$$

由实际情形知, 点  $M, N, E$  在圆台的过轴线  $O_1O_2$  的中点  $E$  且与轴线垂直的截面圆上,  $EM = \frac{1}{2}(O_1D + O_2A) = \frac{7}{2}$ .

由垂径定理知  $EO$  垂直平分  $MN$ ,  $OM = ON = \sqrt{EM^2 - EO^2} = 2\sqrt{3}$ ,

记椭圆的离心率为  $e$ , 长半轴长、短半轴长、半焦距为  $a, b, c$ ,

$$\text{则 } e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2} = 1 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{3}{4}, e = \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{故答案为: } \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



### 三、解答题 (本题共 6 道小题, 共 70 分)

17.(1) 0.125; (2)  $\frac{3}{10}$

【解析】(1) 依题意可得  $(0.05 + 0.075 + a + 0.15 + 0.1) \times 2 = 1$ , 解得  $a = 0.125$ ; .....2 分

(2) 由 (1) 可得高度在  $[15, 17)$  和  $[17, 19)$  的频率分别为 0.1 和 0.15, 所以分层抽取的 5 株中, 高度在  $[15, 17)$

和  $[17, 19)$  的株数分别为 2 和 3, 因此记高度在  $[15, 17)$  植株为  $m, n$ , 记高度在  $[17, 19)$  植株为  $A, B, C$ ,

则所有选取的结果为  $(m, n), (m, A), (m, B), (m, C), (n, A), (n, B), (n, C), (A, B),$

$(A, C), (B, C)$  共 10 种情况, ... 6 分

令抽取的 2 株高度均在  $[15, 17)$  内为事件  $M$ , 事件  $M$  的所有情况为  $(A, B), (A, C), (B, C)$  共 3 种情

况, ... 10 分

即  $P(M) = \frac{3}{10}$  .....12 分

$$18.(1)\frac{\sqrt{6}}{3} \quad (2)15-6\sqrt{3}$$

【解析】(1) 因为 C 点关于直线 BD 的对称点在直线 AD 上，

所以 DB 平分  $\angle ADC$ ，所以  $\angle ADB = \angle CDB$ ，因为  $\angle CBD = \angle CDB$ ，所以  $\angle ADB = \angle CBD$ ， $BC=CD$ ，

所以  $AD \parallel BC$ ，所以  $\angle CAD = \angle ACB$ ，

因为  $\angle CBD = \angle CDB = 30^\circ$ ， $\angle ACD = 75^\circ$ ，

所以  $\angle ACB = \angle CAD = 45^\circ$ ，……3 分

$$\text{所以 } \frac{\sin \angle BAC}{\sin \angle ABC} = \frac{BC}{AC} = \frac{CD}{AC} = \frac{\sin \angle CAD}{\sin \angle ADC} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \dots\dots 6 \text{ 分}$$

(2) 因为在  $\triangle ACD$  中，由正弦定理得  $\frac{CD}{\sin \angle CAD} = \frac{AC}{\sin \angle ADC}$ ，

$$\text{所以 } \frac{CD}{\sin 45^\circ} = \frac{3}{\sin 60^\circ}, \quad \frac{\sqrt{3}}{2} CD = 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2},$$

所以  $CD = \sqrt{6}$ ，所以  $CB = \sqrt{6}$ ，……9 分

在  $\triangle ABC$  中，由余弦定理得，

$$AB^2 = CB^2 + CA^2 - 2CB \cdot CA \cdot \cos \angle ACB$$

$$= (\sqrt{6})^2 + 3^2 - 2\sqrt{6} \times 3 \times \cos 45^\circ = 15 - 6\sqrt{3} \cdot \dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. 【解析】(1) 函数  $f(x) = ax^2 - \ln x$  的定义域为  $(0, +\infty)$ ，求导得  $f'(x) = 2ax - \frac{1}{x} = \frac{2ax^2 - 1}{x}$ ，

当  $a \leq 0$  时， $f'(x) < 0$  恒成立， $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减，……2 分

当  $a > 0$  时，由  $f'(x) < 0$ ，得  $0 < x < \frac{\sqrt{2a}}{2a}$ ，由  $f'(x) > 0$ ，得  $x > \frac{\sqrt{2a}}{2a}$ ，

即函数  $f(x)$  在  $(0, \frac{\sqrt{2a}}{2a})$  上单调递减，在  $(\frac{\sqrt{2a}}{2a}, +\infty)$  上单调递增，……5 分

所以当  $a \leq 0$  时，函数  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减，

当  $a > 0$  时，函数  $f(x)$  在  $(0, \frac{\sqrt{2a}}{2a})$  上单调递减，在  $(\frac{\sqrt{2a}}{2a}, +\infty)$  上单调递增。……6 分

(2) 函数  $g(x) = f(x) + bx = ax^2 - \ln x + bx$  的定义域为  $(0, +\infty)$ ，求导得  $g'(x) = 2ax - \frac{1}{x} + b$ ，

由  $x=1$  是  $g(x)$  的极值点，得  $g'(1) = 2a - 1 + b = 0$ ，即  $b = 1 - 2a$ ，……7 分

$$g'(x) = 2ax - \frac{1}{x} + 1 - 2a = \frac{2ax^2 + (1-2a)x - 1}{x} = \frac{(2ax+1)(x-1)}{x},$$

而  $a > 0$ ，则当  $0 < x < 1$  时， $g'(x) < 0$ ， $g(x)$  单调递减，当  $x > 1$  时， $g'(x) > 0$ ， $g(x)$  单调递增，

所以当  $x=1$  时， $g(x)$  取得极小值. ....8 分

设  $h(a) = \ln a + 2b = \ln a + 2 - 4a, a > 0$ ，求导得  $h'(a) = \frac{1}{a} - 4$ ，

当  $0 < a < \frac{1}{4}$  时， $h'(a) > 0$ ，当  $a > \frac{1}{4}$  时， $h'(a) < 0$ ，则函数  $h(a)$  在  $(0, \frac{1}{4})$  上单调递增，在  $(\frac{1}{4}, +\infty)$  上单调递减，

因此  $h(a) \leq h(\frac{1}{4}) = 1 - \ln 4 < 0$ ，所以  $2b + \ln a \leq 1 - 2 \ln 2$  .....12 分

20. 【解析】(1) 如图，平移线段  $AB$  使得  $A$  与  $C$  重合，并将四面体  $ABCD$  补成一个斜三棱柱.

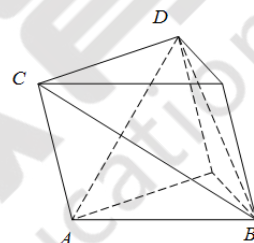
则该斜棱柱的底面积  $S = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin 60^\circ = \sqrt{3}$ ，高  $h = 1$ ，所以该斜棱柱的体积为

定值. ....2 分

此斜棱柱恰好可以分为两两底面积相同，高相同的三个三棱锥.

于是这三个三棱锥的体积都相等，都是斜棱柱的  $\frac{1}{3}$ .

所以四面体  $ABCD$  的体积为  $V = \frac{1}{3}Sh = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，是定值. ....5 分



(2) 设球心是  $O$ ，并设  $O$  与平面  $\alpha$ ，平面  $\beta$  的距离分别是  $h_1, h_2$ .

由  $OA = OB = OC = OD = \frac{\sqrt{5}}{2}$  可知， $O$  在  $A, B$  的中垂面和  $C, D$  的中垂面的交线上.

设  $AB$  的中点是  $M$ ， $CD$  的中点是  $N$ . 则由勾股定理得  $OM = ON = \frac{1}{2}$ .

注意到  $1 = h_1 + h_2 \leq OM + ON = 1$ ，所以  $O, M, N$  共线，

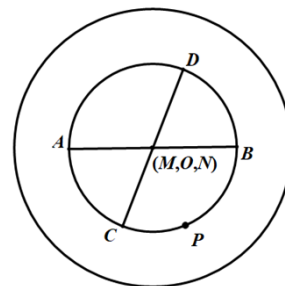
且  $MN \perp$  平面  $\alpha$  .....8 分

因为  $P \in \beta$ ，且  $P, A, B, C, D$  均在球  $O$  上，所以  $P$  在以  $N$  点为圆心、以  $CD$  为直径的圆上(除去  $C, D$  两点).

过点  $N$  直线  $AB$  的平行线  $A_1B_1$ ，

设点  $P$  到直线  $AB, A_1B_1$  的距离分别为  $d, d_1$ ，则  $d = \sqrt{1 + d_1^2}$ ，

又  $d_1 \in [0, 1]$ ，所以  $d \in [1, \sqrt{2}]$  .....12 分



俯视图

21. 【解析】(1) 由题意，得  $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{5}$  且  $\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2b = 4\sqrt{5}$ ，又  $a^2 = b^2 + c^2$ ，

解得  $a^2 = 5, b^2 = 4$ ，所以椭圆  $C$  的标准方程为  $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$  .....4 分

(2) 设切线  $OA$  的方程为  $y = k_1x$ , 切线  $OB$  的方程为  $y = k_2x$ , “环绕圆”的圆心  $D$  为  $(x_0, y_0)$ .

由“环绕圆”的定义, 可得“环绕圆”的半径为 1, 所以“环绕圆”的标准方程为  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 1$ .

因为直线  $OA: y = k_1x$  与“环绕圆”相切, 则由点到直线的距离公式可得:  $\frac{|k_1x_0 - y_0|}{\sqrt{k_1^2 + 1}} = 1$ , .....6 分

化简得  $(x_0^2 - 1)k_1^2 - 2x_0y_0k_1 + y_0^2 - 1 = 0$ .

同理可得  $(x_0^2 - 1)k_2^2 - 2x_0y_0k_2 + y_0^2 - 1 = 0$ .

所以  $k_1, k_2$  是方程  $(x_0^2 - 1)k^2 - 2x_0y_0k + y_0^2 - 1 = 0$  的两个不相等的实数根,

所以  $x_0^2 - 1 \neq 0, \Delta > 0, k_1k_2 = \frac{y_0^2 - 1}{x_0^2 - 1}$ . .....8 分

又因为“环绕圆”的圆心  $(x_0, y_0)$  在椭圆  $C$  上, 所以代入椭圆方程  $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$  中,

可得  $\frac{x_0^2}{5} + \frac{y_0^2}{4} = 1$ , 解得  $y_0^2 = 4 - \frac{4}{5}x_0^2$ .

所以  $k_1k_2 = \frac{y_0^2 - 1}{x_0^2 - 1} = -\frac{1}{5}\left(4 - \frac{11}{x_0^2 - 1}\right)$  .....10 分

又因为  $0 \leq x_0^2 \leq 5$  且  $x_0^2 - 1 \neq 0$ , 所以  $-1 \leq x_0^2 - 1 < 0$  或  $0 < x_0^2 - 1 \leq 4$ .

所以  $\frac{1}{x_0^2 - 1} \leq -1$  或  $\frac{1}{x_0^2 - 1} \geq \frac{1}{4}$ , 所以  $\frac{-11}{x_0^2 - 1} \geq 11$  或  $\frac{-11}{x_0^2 - 1} \leq -\frac{11}{4}$ ,

所以  $-\frac{1}{5}\left(4 - \frac{11}{x_0^2}\right) \leq -3$  或  $-\frac{1}{5}\left(4 - \frac{11}{x_0^2}\right) \geq -\frac{1}{4}$ .

所以  $k_1k_2$  的取值范围是  $(-\infty, -3] \cup \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right)$  .....12 分

选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

[选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

22. 【解析】(1) 因为直线  $l$  的参数方程为  $\begin{cases} x = -2 + \frac{1}{2}t \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$  ( $t$  为参数), 曲线  $C_1$  的极坐标方程为  $\rho = \sqrt{6}$ ,

消去参数, 直线  $l$  的普通方程为  $\sqrt{3}x - y + 2\sqrt{3} = 0$ , .....2 分



曲线  $C_1$  的普通方程为：  $x^2 + y^2 = 6$ ，所以  $C_1$  的参数方程为  $\begin{cases} x = \sqrt{6} \cos \theta \\ y = \sqrt{6} \sin \theta \end{cases}$  ( $\theta$  为参数) .....4 分

(2) 由 (1) 有：  $C_1$  的参数方程为  $\begin{cases} x = \sqrt{6} \cos \theta \\ y = \sqrt{6} \sin \theta \end{cases}$  ( $\theta$  为参数)，

由题意知，曲线  $C_2$  的参数方程为  $\begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sqrt{3} \sin \theta \end{cases}$  ( $\theta$  为参数)， .....6 分

所以可设点  $P(\cos \theta, \sqrt{3} \sin \theta)$ ，又直线  $l$  的普通方程为  $\sqrt{3}x - y + 2\sqrt{3} = 0$ ，

故点  $P$  到直线  $l$  的距离为：
$$d = \frac{|\sqrt{3} \cos \theta - \sqrt{3} \sin \theta + 2\sqrt{3}|}{\sqrt{3+1}} = \frac{\sqrt{3} \left| \sqrt{2} \sin \left( \theta - \frac{\pi}{4} \right) - 2 \right|}{2}$$
， .....8 分

所以当  $\sin \left( \theta - \frac{\pi}{4} \right) = 1$  时，  $d_{\min} = \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{6}}{2}$ ，即点  $P$  到直线  $l$  的距离的最小值为  $\frac{2\sqrt{3} - \sqrt{6}}{2}$  .....10 分

[选修 4-5：不等式选讲] (10 分)

23. 【解析】(1) 由  $f(2x) + f(x+4) \geq 6$  得：  $|2x-1| + |x+3| \geq 6$ ，

当  $x < -3$  时，  $-2x+1-x-3 \geq 6$ ，解得  $x < -3$ ；

当  $-3 \leq x \leq \frac{1}{2}$  时，  $-2x+1+x+3 \geq 6$ ，解得  $-3 \leq x \leq -2$ ；

当  $x > \frac{1}{2}$  时，  $2x-1+x+3 \geq 6$ ，解得  $x \geq \frac{4}{3}$ ；

综上，不等式的解集为  $\{x | x \leq -2 \text{ 或 } x \geq \frac{4}{3}\}$  .....4 分

(2) 证明：  $f(ab) > f(a-b+1) \Leftrightarrow |ab-1| > |a-b|$ ，

因为  $|a| < 1$ ，  $|b| < 1$ ，即  $a^2 < 1$ ，  $b^2 < 1$ ， .....6 分

所以  $|ab-1|^2 - |a-b|^2 = a^2b^2 - 2ab + 1 - a^2 + 2ab - b^2 = a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1 = (a^2-1)(b^2-1) > 0$ ，

所以  $|ab-1|^2 > |a-b|^2$ ，即  $|ab-1| > |a-b|$ ，所以原不等式成立. ....10 分