达州市普通高中 2024 届第二次诊断性测试

数学试题（理科）

注意事项：

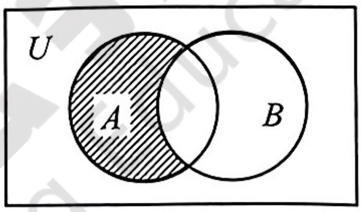
1. 答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号．回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷无效.
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．复数 z 满足 $\dfrac{i}{z}=1-i$，则在复平面内表示复数 z 的点的坐标是

A．$(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2})$　　B．$(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2})$　　C．$(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2})$　　D．$(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2})$

2．设全集 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x|-1<x\leqslant 2\}$，$B=\{x\,|\,x^2-4x<0\}$，则图中阴影部分对应的集合是



A．$\{x|-1<x\leqslant 2\}$

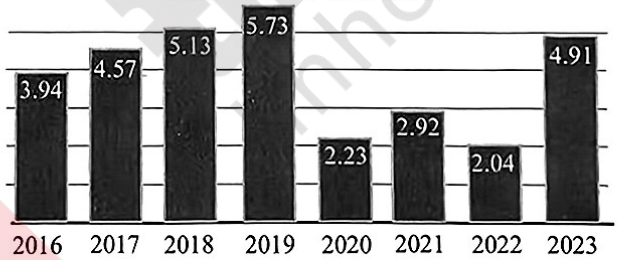
B．$\{x|0<x\leqslant 2\}$

C．$\{x|-1<x\leqslant 0\}$

D．$\{x|-1<x<0\}$

3．下图是某地区 2016-2023 年旅游收入（单位：亿元）的条形图，则下列说法错误的是

2016-2023 年旅游收入



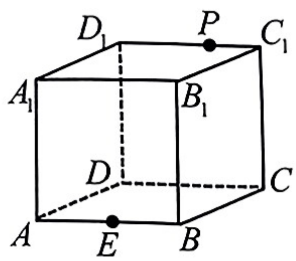
A．该地区 2016-2019 年旅游收入逐年递增

B．该地区 2016-2023 年旅游收入的中位数是 4.30

C．经历了疫情之后，该地区 2023 年旅游收入恢复到接近 2018 年水平

D．该地区 2016-2023 年旅游收入的极差是 3.69

4．如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为 AB 中点，P 为线段 C_1D_1 上一动点，过点 D，E，P 的平面截正方体的截面图形不可能是



A．三角形

B．矩形

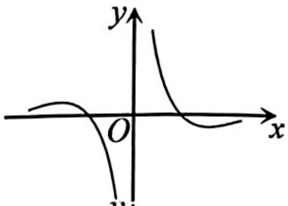
C．梯形

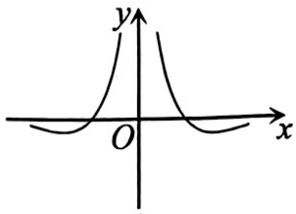
D．菱形

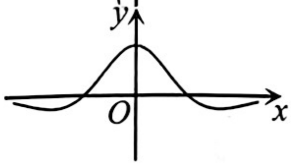
5．$\dfrac{(x-2y)^5}{xy^3}$ 展开式中 x 项的系数为

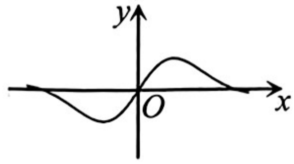
A．80　　B．-80　　C．40　　D．-40

6. 函数 $f(x)=\dfrac{3\cos x}{2^x+2^{-x}}$ 的部分图象大致为

A.


B.


C.


D.


7. 双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$ 的左、右顶点分别为 A_1，A_2，P 为 C 上一点，若直线 PA_1 与直线 PA_2 斜率之积为 2，则 C 的离心率为

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. 3

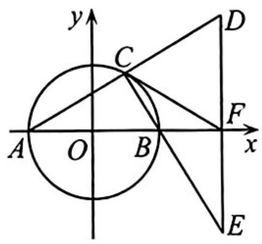
8. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$，满足 $f(2-x)=f(x)$，当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=\log_2(x+2)+a$，若 $f(15)=3f(5)+b$，则 $a+b=$

A. $3-3\log_2 3$　　B. $4-3\log_2 3$　　C. $3-4\log_2 3$　　D. $4-4\log_2 3$

9. 如图，灯笼的主体可看作将一个椭圆绕短轴旋转得到的，这样的旋转体称为椭圆体．已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 绕短轴旋转得到的椭圆体的体积和表面积可以用公式 $V=\dfrac{4}{3}\pi a^2 b$ 和 $S=\dfrac{4}{3}\pi(a^2+2ab)$ 计算．若灯笼主体的体积为 $\dfrac{32}{3}\pi$，$a\leqslant 4$，则该灯笼主体表面积取值范围为

A. $(8\pi,\ \dfrac{80\pi}{3}]$　　B. $(16\pi,\ \dfrac{64\pi}{3}]$　　C. $(16\pi,\ \dfrac{80\pi}{3}]$　　D. $(8\pi,\ \dfrac{64\pi}{3}]$

10. 如图，$\odot O: x^2+y^2=4$ 与 x 轴交于点 A，B，C 是 $\odot O$ 上第一象限内的点，D，E 分别在射线 AC，CB 上，DE 交 x 轴于点 F．若直线 DE 的方程为 $x=4$，F 是线段 DE 中点，则直线 CF 的方程为



A. $2x+3y-8=0$

B. $x+2y-4=0$

C. $2x+\sqrt{3}y-8=0$

D. $x+\sqrt{3}y-4=0$

11. 在斜边为 BC 的 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$AB=8$，$AC=6$，D 为 $\angle BAC$ 平分线上一点，且 A，B，C，D 四点共圆，$\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，则 $x+y=$

A. 2　　B. $\dfrac{7}{24}$　　C. $\dfrac{49}{24}$　　D. $\dfrac{25}{12}$

12. 已知$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}=ad-bc$，定义运算@：$f(x)@g(x)=\begin{vmatrix} f'(x) & a \\ f(x) & g(x) \end{vmatrix}$，其中$f'(x)$是函数$f(x)$的导数．若$\varphi(x)=(\frac{1}{2}x^2)@\ln x$存在极大值点$m$，且$\varphi(m)\geqslant\frac{e^2}{2}$，则$a$的取值范围是

A. $(0,\frac{3}{e^2}]$　　B. $(e^2+2,+\infty)$　　C. $(0,1)$　　D. $(0,\frac{1}{e^2}]$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13. 随机变量$\xi\sim B(5,p)$，$E(\xi)=3$，则$p=$________.

14. 已知$f(x)=\begin{cases}-x^2+1, & -1\leqslant x<1, \\ -|x-2|+1, & 1\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$，则$f(f(\frac{3}{2}))=$________.

15. 将函数$f(x)=2\sin x\cos(x-\frac{\pi}{3})+\sin x\cos x-\sqrt{3}\cos^2 x$的图象向左平移$a(a>0)$个单位得到函数$g(x)$的图象．若$g(\frac{\pi}{3})=-2$，则$a$的最小值为________.

16. 在$\triangle ABC$中，角A，B，C的对边分别为a，b，c，$a^2+b^2+c^2=2\sqrt{3}bc\sin A$，点$D$在平面$ABC$内，$DC=2DB=2$，则$DA$的最大值为________.

三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：共 60 分．

17. (12 分)

等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=8$，当$n=4$和 5 时，S_n取得最大值．

(1)求S_n；

(2)若$\{b_n\}$为等比数列，$b_1=\frac{S_4}{5}$，$b_2=-a_6$，求$\{b_n\}$通项公式．

18. (12 分)

随着 AI 技术的不断发展，人工智能科技在越来越多的领域发挥着重要的作用．某校在寒假里给学生推荐了一套智能辅导系统，学生可自愿选择是否使用该系统完成假期的作业．开学时进行了入学测试，随机抽取了100名学生统计得到如下列联表：

	使用智能辅导系统	未使用智能辅导系统	合计
入学测试成绩优秀	20	20	40
入学测试成绩不优秀	40	20	60
合计	60	40	100

(1)判断是否有95%的把握认为入学测试成绩优秀与使用智能辅导系统相关；

(2)若把这 100 名学生按照入学测试成绩是否优秀进行分层随机抽样，从中抽取 5 人，再从这 5 人中随机抽取 2 人，记抽取的 2 人中入学测试成绩优秀的人数为X，求X的分布列及数学期望$E(X)$．

附：$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中$n=a+b+c+d$．

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635

19．(12 分)

已知抛物线$\Gamma: y^2=2px(p>0)$，直线$l: y=k(x-p)$与Γ交于A，B两点，线段AB中点$M(x_m, y_m)$，$ky_m=2$．

(1)求抛物线Γ的方程；

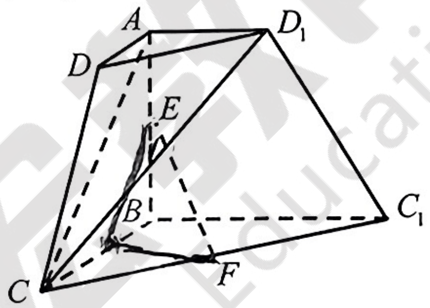
(2)直线l与x轴交于点C，O为原点，设$\triangle BOC$，$\triangle COM$，$\triangle MOA$的面积分别为$S_{\triangle BOC}$，$S_{\triangle COM}$，$S_{\triangle MOA}$，若$S_{\triangle BOC}$，$S_{\triangle COM}$，$S_{\triangle MOA}$成等差数列，求k．

20．(12 分)

如图，在直角梯形$ABCD$中，$AD\,//\,BC$，$AB\perp BC$，$AB=BC=2AD$，把梯形$ABCD$绕AB旋转至ABC_1D_1，E，F分别为AB，CC_1中点.

(1)证明：$EF\,//$平面CD_1A；

(2)若$\angle DAD_1=\theta\ (0<\theta<\pi)$，求二面角$C-AD_1-C_1$余弦的最小值.



21．(12 分)

已知$f(x)=a\cos x+\dfrac{x^2}{2}$.

(1)若$f(x)$在$[0,\dfrac{\pi}{2}]$上单调递增，求a的取值范围；

(2)证明：$\dfrac{1}{\tan 1}+\dfrac{1}{2\tan\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{3\tan\frac{1}{3}}+\cdots+\dfrac{1}{n\tan\frac{1}{n}}>\dfrac{2n^2-n}{2n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$.

（二）选考题：共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.

22．[选修 4-4：坐标系与参数方程](10 分)

在平面直角坐标系xOy中，曲线$C_1:\begin{cases}x=2\cos\alpha,\\ y=2+2\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$为参数），以坐标原点$O$为极点，$x$轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线$C_2$的极坐标方程为$\rho\cos 2\theta=4\sqrt{2}\cos(\theta+\dfrac{\pi}{4})$.

(1)求C_1的普通方程和C_2的直角坐标方程；

(2)求以曲线C_1与曲线C_2的公共点为顶点的多边形面积.

23．[选修 4-5：不等式选讲](10 分)

设$f(x)=|x+3|-|2x-4|$，不等式$f(x)\geqslant|m-1|+m$有解.

(1)求m取值范围；

(2)记m的最大值为n，$3a+b+2c=n$，求$5a^2+b^2+c^2+2ab$的最小值.