绵阳市高中2021级第三次诊断性考试

理科数学参考答案及评分意见

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分.

CBACB　DDCBC　DA

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分.

13．10　　14．$\frac{\sqrt{6}}{2}$　　15．45π　　16．2

三、解答题：本大题共6小题，共70分.

17．解：（1）由列联表可计算$K^2=\frac{100\times(24\times12-48\times16)^2}{40\times60\times72\times28}\approx4.762>3.841$，………4分

∴有95%的把握认为参数调试能够改变产品合格率. ………………………5分

（2）根据题意，设备更新后的合格概率为0.8，淘汰品概率为0.2. ………6分

可以认为从生产线中抽出的6件产品是否合格是相互独立的，……………8分

设X表示这6件产品中淘汰品的件数，则$X\sim B(6,0.2)$，………………9分

可得：$p=P(X\le1)=C_6^0\times0.8^6\times0.2^0+C_6^1\times0.8^5\times0.2^1$………………………10分

$=0.8^5\times(0.8+1.2)=0.65536$. ………………………………………12分

18．解：（1）设$\{a_n\}$的公差为d，则1，$1+d$，$2+2d$成等比数列，……………1分

∴$(1+d)^2=1\times(2+2d)$，解得：$d=1$或$d=-1$，……………………………3分

而$d=-1$，不满足a_1，a_2，a_3+1成等比数列，

∴$d=1$，………………………………………………………………………4分

∴数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=n$. …………………………………………5分

（2）令$D_n=a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_{n-1}b_2+a_nb_1=3^n-1$，………………………6分

∴$D_{n+1}=a_1b_{n+1}+a_2b_n+a_3b_{n-1}+\cdots+a_nb_2+a_{n+1}b_1=3^{n+1}-1$，……………7分

两式相减有：$D_{n+1}-D_n=a_1b_{n+1}+(b_n+b_{n-1}+\cdots+b_1)=2\cdot3^n$，……………8分

∴数列$\{b_n\}$的前n+1项和为$2\cdot3^n$，即$T_{n+1}=2\cdot3^n$，……………………9分

又$D_1=a_1b_1=2$，所以$b_1=2$，………………………………………………10分

∴$b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}+b_n=2\cdot3^{n-1}$，……………………………………11分

$\therefore T_n=2\cdot 3^{n-1}$．……………………………………………………12分

19．解：（1）过 C 作 $CH\perp BB_1$ 交 BB_1 于 H，……………………………………1 分

$\because C$ 在平面 ABB_1A_1 内的射影落在棱 BB_1 上，

$\therefore CH\perp$ 平面 ABB_1A_1，又 $AB\subset$ 平面 ABB_1A_1，……………………………2 分

$\therefore CH\perp AB$，……………………………………………………………………3 分

又 $AB\perp B_1C$，且 $B_1C\cap CH=C$，……………………………………………4 分

$\therefore AB\perp$ 平面 BCC_1B_1；………………………………………………………5 分

（2）$\because V_{ABC-A_1B_1C_1}=\dfrac{1}{2}S_{ABB_1A_1}\cdot CH$，则 $CH=\dfrac{2\times\frac{3}{2}}{3}=1$，……………………6 分

过 C 作 $CQ\perp AA_1$ 交 AA_1 于 Q，连结 HQ，

$\because AA_1$ 与 CC_1 的距离为 $\sqrt{2}$　则 $CQ=\sqrt{2}$，

又$\because CH\perp$ 平面 ABB_1A_1，则 $CH\perp HQ$，…………………………………………7 分

在 $\mathrm{Rt}\triangle CHQ$ 中：$HQ^2=CQ^2-CH^2=2-1=1$，则 $HQ=1$，

又 $AA_1\perp CH$ 且 $AA_1\perp CQ$，

$\therefore AA_1\perp$ 平面 CHQ　$\therefore AA_1\perp HQ$

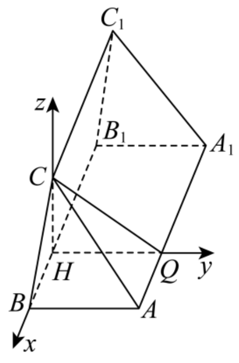
又由（1）知：$AB\perp$ 平面 BCC_1B_1，$\therefore AB\perp BB_1$，

$\therefore AB\perp AA_1$，则四边形 $ABHQ$ 为矩形，

$\therefore AB=HQ=1$，

又四边形 ABB_1A_1 的面积为 3，则 $BB_1=3$，……………………………………8 分

分别以 HB，HQ，HC 为 x 轴、y 轴、z 轴建立如图所示空间直角坐标系，设 $BH=x(x>0)$，



$\therefore B(x,0,0)$，$A(x,1,0)$，$C_1(-3,0,1)$，

$\because AC_1=3\sqrt{3}$　$\therefore AC_1^{\,2}=(x+3)^2+1^2+1^2=27$，

解得 $x=2$，…………………………………………9 分

$\therefore B(2,0,0)$，$A_1(-1,1,0)$，$C(0,0,1)$，

$\therefore \overrightarrow{A_1B}=(3,-1,0)$，$\overrightarrow{BC}=(-2,0,1)$，

设平面 A_1BC 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$，

$\therefore \begin{cases}\overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{n_1}=3x-y=0\\ \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{n_1}=-2x+z=0\end{cases}$，令 $x=1$，则 $\boldsymbol{n}_1=(1,3,2)$，……………………… 10 分

易知平面 ABB_1A_1 的法向量 $\boldsymbol{n}_2=(0,0,1)$，……………………………… 11 分

$\therefore \cos<\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2>=\dfrac{2}{\sqrt{14}\cdot 1}=\dfrac{\sqrt{14}}{7}$，

$\therefore$ 平面 A_1BC 与平面 ABB_1A_1 所成锐二面角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{14}}{7}$．…………… 12 分

20．解：（1）离心率 $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 $\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$，① ………………………1 分

当 $x=1$，$y=\pm b\sqrt{\frac{a^2-1}{a^2}}$，则 $|AB|=2b\sqrt{\frac{a^2-1}{a^2}}=\sqrt{3}$，② ……………………3 分

联立①②得: $a=2$，$b=1$，…………………………………………………4 分

故椭圆 C 方程为：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$；……………………………………………5 分

（2）设过 F，A，B 三点的圆的圆心为 $Q(0,n)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

又 $F(-\sqrt{3},0)$，

则 $|QA|^2=|QF|^2$，即 $(x_1-0)^2+(y_1-n)^2=(0+\sqrt{3})^2+(n-0)^2$，……………6 分

又 $A(x_1,y_1)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 上，故 $\frac{x_1^2}{4}+y_1^2=1$，

带入上式化简得到：$3y_1^2+2ny_1-1=0$，③………………………………7 分

同理，根据 $|QB|^2=|QF|^2$ 可以得到：$3y_2^2+2ny_2-1=0$，④ ……………8 分

由③④可得：y_1,y_2 是方程 $3y^2+2ny-1=0$ 的两个根，则 $y_1y_2=-\frac{1}{3}$，……9 分

设直线 AB：$x=ty+1$，联立方程：$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1\\ x=ty+1\end{cases}$，

整理得：$(t^2+4)y^2+2ty-3=0$，⑤ ………………………………………10 分

故 $y_1y_2=\frac{-3}{t^2+4}=-\frac{1}{3}$，解得：$t^2=5$，

$\therefore t=\pm\sqrt{5}$，……………………………………………………11 分

$\therefore$直线 AB 的方程为：$x\pm\sqrt{5}y-1=0$．……………………………12 分

21．解：（1）当 $a=1$ 时， $f(x)=(\frac{1}{2}x^2+x)\ln x-\frac{1}{4}x^2-x$，

$\therefore f'(x)=(x+1)\ln x$，则切线斜率 $k=\mathrm{e}+1$， ……………………………2 分

$\therefore$ 曲线 $f(x)$ 在(e， $f(\mathrm{e})$)处的切线方程： $y-\frac{1}{4}\mathrm{e}^2=(\mathrm{e}+1)(x-\mathrm{e})$， ………4 分

即： $(\mathrm{e}+1)x-y-\frac{3}{4}\mathrm{e}^2-\mathrm{e}=0$， ……………………………………………5 分

（2）**证明方法一**：因为 $f'(x)=(x+a)(\ln x-\ln a)$， ……………………………6 分

由 $f'(x)>0$ 得到 $x>a$；由 $f'(x)<0$ 得到 $0<x<a$.

$\therefore f(x)$ 在 $(0,\ a)$ 单调递减，在 $(a,+\infty)$ 单调递增.

$\therefore f(x)_{\min}=f(a)=-\frac{5}{4}a^2$， ……………………………………………………7 分

要证 $f(x_0)<-\frac{5}{8}(2+\ln a)\mathrm{e}^{a-1}$，即证： $-\frac{5}{4}a^2<-\frac{5}{8}(2+\ln a)\mathrm{e}^{a-1}$，

只需证： $\frac{2a^2}{\mathrm{e}^{a-1}}-\ln a-2>0\ (1<a<2)$ （*） ……………………………8 分

设 $g(x)=\frac{2x^2}{\mathrm{e}^{x-1}}-\ln x-2(1<x<2)$，

则 $g'(x)=\frac{4x-2x^2}{\mathrm{e}^{x-1}}-\frac{1}{x}=\frac{4x^2-2x^3-\mathrm{e}^{x-1}}{x\mathrm{e}^{x-1}}$， ……………………………9 分

设 $h(x)=\frac{4x^2-2x^3}{\mathrm{e}^{x-1}}-1(1<x<2)$，

则 $h'(x)=\frac{2x^3-10x^2+8x}{\mathrm{e}^{x-1}}=\frac{2x(x-1)(x-4)}{\mathrm{e}^{x-1}}$，

易知： $h(x)$ 在(1，2)上单调递减，

而 $h(1)=1>0$， $h(2)=-1<0$，

故必存在唯一 $x_0\in(1,\ 2)$， 使得 $h(x_0)=0$， …………………………… 10 分

$\therefore$ 当 $x\in(1,\ x_0)$ 时， $h(x)>0$， 即 $g'(x)>0$；

当 $x\in(x_0,\ 2)$ 时， $h(x)<0$， 即 $g'(x)<0$，

$\therefore g(x)$ 在 $(1,\ x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0,\ 2)$ 上单调递减. ……………… 11 分

而 $g(1)=0$， $g(2)=\frac{8}{\mathrm{e}}-\ln 2-2>0$，

$\therefore g(x)>0$ 在(1，2)上恒成立，即（*）式成立，原命题得证. ………… 12 分

方法二：因为 $f'(x)=(x+a)(\ln x-\ln a)$， ……………………………………6 分

由 $f'(x)>0$ 得到 $x>a$；由 $f'(x)<0$ 得到 $0<x<a$．

$\therefore$ $f(x)$ 在 $(0,a)$ 单调递减，在 $(a,+\infty)$ 单调递增．

$\therefore$ $f(x)_{\min}=f(a)=-\dfrac{5}{4}a^2$， ……………………………………7 分

要证 $f(x_0)<-\dfrac{5}{8}(2+\ln a)e^{a-1}$，即证：$-\dfrac{5}{4}a^2<-\dfrac{5}{8}(2+\ln a)e^{a-1}$，

只需证：$\dfrac{2a}{e^{a-1}}-\dfrac{2+\ln a}{a}>0(1<a<2)$， ……………………………………8 分

设 $g(x)=\dfrac{2x}{e^{x-1}}-\dfrac{2+\ln x}{x}(1<x<2)$，即证 $g(x)>0$ 在 $x\in(1,2)$恒成立.

则 $g'(x)=\dfrac{2-2x}{e^{x-1}}+\dfrac{1+\ln x}{x^2}(1<x<2)$，

令 $h(x)=g'(x)$，则 $h'(x)=\dfrac{2(x-2)}{e^{x-1}}-\dfrac{1+2\ln x}{x^3}(1<x<2)$， ……………………9 分

又$\because 1<x<2$，

$\therefore \dfrac{2(x-2)}{e^{x-1}}<0$，$-\dfrac{1+2\ln x}{x^3}<0$，

$\therefore h'(x)=\dfrac{2(x-2)}{e^{x-1}}-\dfrac{1+2\ln x}{x^3}<0$ 在$(1,2)$上恒成立. ……………………10 分

$\therefore g'(x)$ 在$(1,2)$单调递减，又 $g'(1)=1>0$，$g'(2)=\dfrac{-8+e(1+\ln 2)}{4e}<0$，

$\therefore$存在 $x_0\in(1,2)$，使得 $g(x)$ 在 $(1,x_0)$ 单调递增，在 $(x_0,2)$ 单调递减.

又 $g(1)=0$，$g(2)=\dfrac{8-e(2+\ln 2)}{2e}>0$， ……………………………………11 分

$\therefore g(x)>0$ 在 $x\in(1,2)$恒成立，得证. ……………………………………12 分

方法三：因为 $f'(x)=(x+a)(\ln x-\ln a)$， ……………………………………6 分

由 $f'(x)>0$ 得到 $x>a$；由 $f'(x)<0$ 得到 $0<x<a$.

$\therefore f(x)$ 在 $(0，a)$ 单调递减，在 $(a,+\infty)$ 单调递增.

$\therefore f(x)_{\min}=f(a)=-\dfrac{5}{4}a^2$， ……………………………………7 分

要证 $f(x_0)<-\dfrac{5}{8}(2+\ln a)e^{a-1}$，即证：$-\dfrac{5}{4}a^2<-\dfrac{5}{8}(2+\ln a)e^{a-1}$，

只需证：$\dfrac{(2+\ln a)}{2a^2}e^{a-1}<1,\ (1<a<2)$， ……………………………………8 分

令 $g(a)=\dfrac{(2+\ln a)}{2a^2}e^{a-1}(1<a<2)$，

则 $g'(a)=\dfrac{a(2+\ln a)-3-2\ln a}{2a^3}e^{a-1}(1<a<2)$，

设 $h(a)=a(2+\ln a)-3-2\ln a(1<a<2)$， ……………………………………9 分

$\therefore h'(a)=3+\ln a-\dfrac{2}{a}(1<a<2)$，易知 $h'(a)$ 在(1，2)单调递增.

$\therefore h'(a)>h'(1)=1>0$， ……………………………………10 分

$\therefore h(a)$ 在(1，2)单调递增，

又 $h(1)=-1<0,\ h(2)=1>0$，

$\therefore$存在唯一 $a_0\in(1，2)$，使得当 $a\in(1，a_0)$，$h(a)<0$，$g'(a)<0$，$g(a)$ 单调递减，

当 $a\in(a_0,2)$，$h(a)>0$，$g'(a)>0$，$g(a)$ 单调递增， ……………………11 分

又 $g(1)=1,\ g(2)=\dfrac{(2+2\ln 2)e}{8}<1$，

$\therefore g(a)<1$ 在 $a\in(1，2)$ 恒成立，原不等式得证. ……………………12 分

22.（1）方法一：

令 $x=0$，即 $\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha=0$，解得 $\tan\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，……………………1 分

$\therefore \alpha=\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi$ 或 $\alpha=\dfrac{11\pi}{6}+2k\pi$，$k\in Z$，……………………2 分

当 $\alpha=\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi$ 时，$y=2+\dfrac{1}{2}-\sqrt{3}\times(-\dfrac{\sqrt{3}}{2})=4$；……………………3 分

当 $\alpha=\dfrac{11\pi}{6}+2k\pi$ 时，$y=2-\dfrac{1}{2}-\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=0$，……………………4 分

$\therefore$曲线 C_1 与 y 轴的交点坐标为（0，4），（0，0）. ……………………5 分

方法二：消参：由 C_1 的参数方程得：

$x^2+(y-2)^2=(\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha)^2+(\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha)^2=1+3=4$，……………………1 分

即曲线 C_1 的普通方程为：$x^2+(y-2)^2=4$，……………………2 分

令 $x=0$，得 $y=0$ 或 4，……………………4 分

$\therefore$曲线 C_1 与 y 轴的交点坐标为（0，4），（0，0）. ……………………5 分

（2）方法一：将曲线 C_1：$x^2+(y-2)^2=4$ 化为极坐标方程，

得：$\rho=4\sin\theta$，……………………6 分

联立 C_1，C_2 的极坐标方程 $\begin{cases}\rho\sin(\theta+\dfrac{\pi}{3})=2\\ \rho=4\sin\theta\end{cases}$，得 $4\sin\theta\cdot\sin(\theta+\dfrac{\pi}{3})=2$，

从而 $\sin\theta(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)=1\Rightarrow\dfrac{1-\cos2\theta}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin2\theta=1$，……………………7 分

整理得：$\sin(2\theta-\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{1}{2}$，所以 $2\theta-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}$ 或 $\dfrac{5\pi}{6}$，……………………8 分

即 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 或 $\dfrac{\pi}{2}$，……………………9 分

$\therefore \angle AOB=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}$. ……………………10 分

方法二：将 C_2 的极坐标方程 $\rho\sin(\theta+\dfrac{\pi}{3})=2$，

化为直角坐标方程：$\sqrt{3}x+y-4=0$，……………………6 分

$\therefore C_2$ 是过点（0,4）且倾斜角为 $\dfrac{2\pi}{3}$ 的直线，……………………7 分

不妨设 B（0,4），则 $\angle OBA=\dfrac{\pi}{6}$，因为 BO 为直径，所以 $\angle BAO=\dfrac{\pi}{2}$，…9 分

$\therefore \angle AOB=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}$. ……………………10 分

23.（1）由 $a+b=\frac{3}{a}+\frac{3}{b}$ 得 $a+b=\frac{3(a+b)}{ab}\Rightarrow ab=3$， ①……………………………1 分

又由 $f(x)=|x-a|+|x-b|\geq|(x-a)-(x-b)|=|b-a|=2$， ……………………………3 分

且 $a>b>0$，所以 $a-b=2$， ②……………………………………………………4 分

由①②得：$a=3,b=1$；…………………………………………………………………5 分

（2）$\sqrt{3-at}+\sqrt{bt}=\sqrt{3-3t}+\sqrt{t}=\sqrt{3}\sqrt{1-t}+\sqrt{t}$， ……………………………6 分

令 $\sqrt{t}=\sin\theta,\ 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$，则 $\sqrt{1-t}=\cos\theta$，…………………………………7 分

$\therefore\sqrt{3}\sqrt{1-t}+\sqrt{t}=\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta=2\sin(\theta+\frac{\pi}{3})$，…………………………9 分

$\therefore$当 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 时，即 $t=\frac{1}{4}$ 时，$\sqrt{3-at}+\sqrt{bt}$ 的最大值为 2. ……………… 10 分