绵阳市高中2021级第三次诊断性考试

文科数学参考答案及评分意见

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分.

CDACC　　ACCBD　　CA

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分.

13．2　　14．$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　15．45π　　16．$\sqrt{3}$

三、解答题：本大题共6小题，共70分.

17．解：（1）①当$n=1$时，$6a_1=1+4a_1$，则$a_1=\dfrac{1}{2}$．……………………………1分

②当$n\geq 2$时，由$6S_n=1+4a_n$，得$6S_{n-1}=1+4a_{n-1}$，……………………2分

两式相减，得$6a_n=4a_n-4a_{n-1}$，……………………………………3分

$\therefore a_n=-2a_{n-1}$，即$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=-2(n\geq 2)$，…………………………………4分

$\therefore$数列$\{a_n\}$是以$a_1=\dfrac{1}{2}$为首项，-2为公比的等比数列，………………5分

$\therefore a_n=\dfrac{1}{2}\cdot(-2)^{n-1}$．……………………………………………6分

（2）由（1）得$b_n=S_{2n+1}=\dfrac{\frac{1}{2}[1-(-2)^{2n+1}]}{1-(-2)}=\dfrac{1}{6}+\dfrac{4^n}{3}$，…………………8分

可知数列$\{\dfrac{4^n}{3}\}$是以$\dfrac{4}{3}$为首项，4为公比的等比数列，………………9分

$\therefore T_n=\dfrac{n}{6}+\dfrac{\frac{4}{3}(1-4^n)}{1-4}$……………………………………………10分

$=\dfrac{n}{6}+\dfrac{4^{n+1}-4}{9}$……………………………………………11分

$=\dfrac{2^{2n+3}+3n-8}{18}$．（也可不计算到此步）……………………12分

18．解：（1）调试前，电池的平均放电时间为：

2.5×0.02×5+7.5×0.06×5+12.5×0.08×5+17.5×0.04×5=11小时，………4分

调试后的合格率为：0.1×5+0.06×5=0.8，则$\dfrac{a}{a+12}=0.8$，…………………5分

$\therefore a$=48；……………………………………………………………6分

（2）由列联表可计算$K^2=\dfrac{100\times(24\times 12-48\times 16)^2}{40\times 60\times 72\times 28}\approx 4.762>3.841$，…………10分

∴有 95%的把握认为参数调试能够改变产品合格率. ……………………… 12 分

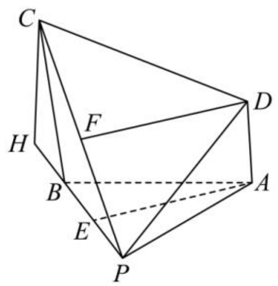
19．解：（1）∵E 是 BP 的中点，$AB=AP$，

∴$AE\perp PB$，………………………………………………………………1 分

又平面 $PAB\cap$平面 $PBC=PB$，且平面 $PAB\perp$平面 PBC，

∴$AE\perp$平面 PBC，…………………………………………………………2 分

过 D 作 $DF\perp PC$ 交 PC 于 F，



∵平面 $PCD\perp$平面 PBC，且平面 $PCD\cap$平面 $PBC=PC$，

∴$DF\perp$平面 PBC，…………………………………………………………4 分

∴$AE\parallel DF$，………………………………………………………………5 分

又 $DF\subset$平面 PCD，$AE\not\subset$平面 PCD，

∴$AE\parallel$平面 PCD；………………………………………………………6 分

（2）∵$AD\parallel BC$

∴$V_{C-PBD}=V_{D-PBC}=V_{A-PBC}=V_{C-PAB}$，

∴$V_{C-PBD}=V_{C-PAB}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABP}\cdot d$，……………………………………………8 分

又∵平面 $PBC\perp$平面 PAB，过 C 作 $CH\perp PB$ 交 PB 于 H，

∴$CH\perp$平面 PAB，…………………………………………………………9 分

在直角△CHB 中：$d=CH=BC\cdot\sin 45^\circ=2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2$，………………… 10 分

∴ $V_{C-PBD}=\frac{2}{3}S_{\triangle ABP}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}AB\cdot AP\cdot\sin\angle BAP$，…………………………… 11 分

∴当 $\sin\angle BAP=1$ 时，体积的最大值为$\frac{8}{3}$. ……………………………… 12 分

20．解：（1）解：当 $a=1$ 时，$f(x)=(\frac{1}{2}x^2+x)\ln x-\frac{1}{4}x^2-x$，…………1 分

$f'(x)=(x+1)\ln x$，…………2 分

此时切线斜率为：$k=\mathrm{e}+1$；…………3 分

所以曲线 $f(x)$ 在 $(\mathrm{e}，f(\mathrm{e}))$ 处的切线方程：$y-\frac{1}{4}\mathrm{e}^2=(\mathrm{e}+1)(x-\mathrm{e})$ …………4 分

即：$(\mathrm{e}+1)x-y-\frac{3}{4}\mathrm{e}^2-\mathrm{e}=0$；…………5 分

（2）证明方法一：因为 $f'(x)=(x+a)(\ln x-\ln a)$，…………6 分

由 $f'(x)>0$ 得到 $x>a$；由 $f'(x)<0$ 得到 $0<x<a$．

$\therefore f(x)$ 在 $(0，a)$ 单调递减，在 $(a,+\infty)$ 单调递增．

$\therefore f(x)_{\min}=f(a)=-\frac{5}{4}a^2$，…………7 分

要证 $f(x)>-\frac{5}{4}(1+\ln a)\mathrm{e}^{a-1}$，即证：$-\frac{5}{4}a^2>-\frac{5}{4}(1+\ln a)\mathrm{e}^{a-1}$，

只需证：$\frac{1+\ln a}{a^2}\mathrm{e}^{a-1}>1(a>1)$，…………8 分

设 $g(x)=\frac{1+\ln x}{x^2}\mathrm{e}^{x-1}$，即证：$g(x)>1$ 在 $x\in(1，+\infty)$ 恒成立．…………9 分

则 $g'(x)=\frac{[(x-2)\ln x+x-1]}{x^3}\mathrm{e}^{x-1}$，

令 $h(x)=(x-2)\ln x+x-1$，…………10 分

$\therefore h'(x)=\ln x-\frac{2}{x}+2$，

$\therefore h'(x)$ 在 $(1，+\infty)$ 上单调递增，则 $h'(x)>h'(1)=0$

$\therefore h(x)$ 在 $(1，+\infty)$ 上单调递增，则 $h(x)>h(1)=0$ …………11 分

$\therefore g'(x)>0$ 在 $(1，+\infty)$ 恒成立，则 $h(x)$ 在 $(1，+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore g(x)>g(1)=0$，原不等式得证．…………12 分

方法 2：因为 $f'(x)=(x+a)(\ln x-\ln a)$，…………6 分

由 $f'(x)>0$ 得到 $x>a$；由 $f'(x)<0$ 得到 $0<x<a$．

$\therefore f(x)$ 在 $(0，a)$ 单调递减，在 $(a,+\infty)$ 单调递增．

$\therefore f(x)_{\min}=f(a)=-\dfrac{5}{4}a^2$， ……………………………………………………7 分

要证 $f(x)>-\dfrac{5}{4}(1+\ln a)e^{a-1}$，即证：$-\dfrac{5}{4}a^2>-\dfrac{5}{4}(1+\ln a)e^{a-1}$，

即证：$a^2<(1+\ln a)e^{a-1}(a>1)$，即证：$\dfrac{a}{e^{a-1}}<\dfrac{1+\ln a}{a}(a>1)$，

只需证：$\dfrac{x}{e^{x-1}}<\dfrac{1+\ln x}{x}$，

令 $g(x)=\dfrac{x}{e^{x-1}}$，则 $g(1+\ln x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$，

即证：$g(x)<g(1+\ln x)$， ……………………………………………………8 分

又$\because g'(x)=\dfrac{1-x}{e^{x-1}}$，且 $x>1$，则 $g'(x)=\dfrac{1-x}{e^{x-1}}<0$，

$\therefore g(x)$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 单调递减， ……………………………………………9 分

又 $x\in(1,+\infty)$，$1+\ln x\in(1,+\infty)$，

$\therefore$即证 $x>1+\ln x$，只需证：$x-1-\ln x>0$， ………………………… 10 分

令 $h(x)=x-1-\ln x$，

$\therefore h'(x)=1-\dfrac{1}{x}>0$，则 $h(x)$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 单调递增， ………………… 11 分

$\therefore h(x)>h(1)=0$，即 $x-1-\ln x>0$，所以原不等式得证． …………… 12 分

21．解：（1）离心率 $e=\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，则 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{2}$，① …………………………1 分

当 $x=1$，$y=\pm b\sqrt{\dfrac{a^2-1}{a^2}}$，则 $|AB|=2b\sqrt{\dfrac{a^2-1}{a^2}}=\sqrt{3}$，② ………………………3 分

联立①②得：$a=2$，$b=1$， ……………………………………………………4 分

故椭圆 C 方程为：$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$； ……………………………………………5 分

（2）设过 F，A，B 三点的圆的圆心为 $Q(0,n)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

又 $F(-\sqrt{3},0)$，

则 $|QA|^2=|QF|^2$，即 $(x_1-0)^2+(y_1-n)^2=(0+\sqrt{3})^2+(n-0)^2$， …………… 6 分

又 $A(x_1, y_1)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 上，故 $\frac{x_1^2}{4}+y_1^2=1$，

带入上式化简得到：$3y_1^2+2ny_1-1=0$，③……………………………………………7 分

同理，根据 $|QB|^2=|QF|^2$ 可以得到：$3y_2^2+2ny_2-1=0$，④ ………………8 分

由③④可得：y_1, y_2 是方程 $3y^2+2ny-1=0$ 的两个根，则 $y_1y_2=-\frac{1}{3}$，……9 分

设直线 AB：$x=ty+1$，联立方程：$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1\\ x=ty+1\end{cases}$，

整理得：$(t^2+4)y^2+2ty-3=0$，⑤ ……………………………………………………10 分

故 $y_1y_2=\frac{-3}{t^2+4}=-\frac{1}{3}$，解得：$t^2=5$，

$\therefore t=\pm\sqrt{5}$，…………………………………………………………………………11 分

$\therefore$ 直线 l 的斜率为：$\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$. ……………………………………………………12 分

22．**解**：（1）方法一：令 $x=0$，即 $\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha=0$，

解得 $\tan\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，…………………………………………………………………1 分

$\therefore \alpha=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ 或 $\alpha=\frac{11\pi}{6}+2k\pi$，$k\in Z$，……………………………………2 分

当 $\alpha=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ 时，$y=2+\frac{1}{2}-\sqrt{3}\times(-\frac{\sqrt{3}}{2})=4$；……………………………3 分

当 $\alpha=\frac{11\pi}{6}+2k\pi$ 时，$y=2-\frac{1}{2}-\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=0$，……………………………4 分

$\therefore$ 曲线 C_1 与 y 轴的交点坐标为（0，4），（0，0）. ……………………………5 分

方法二：消参：由 C_1 的参数方程得：

$x^2+(y-2)^2=(\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha)^2+(\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha)^2=1+3=4$，…………1 分

即曲线 C_1 的普通方程为：$x^2+(y-2)^2=4$，……………………………………………2 分

令 $x=0$，得 $y=0$ 或 4，…………………………………………………………………4 分

$\therefore$ 曲线 C_1 与 y 轴的交点坐标为（0，4），（0，0）. ……………………………5 分

（2）方法一：将曲线 C_1：$x^2+(y-2)^2=4$ 化为极坐标方程，

得：$\rho=4\sin\theta$，……………………………………………………………6 分

联立 C_1，C_2 的极坐标方程 $\begin{cases}\rho\sin(\theta+\dfrac{\pi}{3})=2\\ \rho=4\sin\theta\end{cases}$，得 $4\sin\theta\cdot\sin(\theta+\dfrac{\pi}{3})=2$，

从而 $\sin\theta(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)=1$，则 $\dfrac{1-\cos2\theta}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin2\theta=1$ ………………7 分

整理得：$\sin(2\theta-\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{1}{2}$，所以 $2\theta-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}$ 或 $\dfrac{5\pi}{6}$，…………………………8 分

即 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 或 $\dfrac{\pi}{2}$，………………………………………………………………9 分

$\therefore\angle AOB=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}$． ………………………………………………… 10 分

方法二：将 C_2 的极坐标方程 $\rho\sin(\theta+\dfrac{\pi}{3})=2$，

化为直角坐标方程：$\sqrt{3}x+y-4=0$，………………………………………………6 分

$\therefore C_2$ 是过点（0,4）且倾斜角为 $\dfrac{2\pi}{3}$ 的直线，…………………………………………7 分

不妨设 B（0,4），则 $\angle OBA=\dfrac{\pi}{6}$，因为 BO 为直径，所以 $\angle BAO=\dfrac{\pi}{2}$，　…9 分

$\therefore\angle AOB=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}$． ………………………………………………… 10 分

23．解：（1）由 $a+b=\dfrac{3}{a}+\dfrac{3}{b}$，得 $a+b=\dfrac{3(a+b)}{ab}\Rightarrow ab=3$，　①………………1 分

又由 $f(x)=|x-a|+|x-b|\geq|(x-a)-(x-b)|=|b-a|=2$，……………………3 分

且 $a>b>0$，所以 $a-b=2$，　②……………………………………………………4 分

由①②得：$a=3,b=1$；…………………………………………………………5 分

（2）$\sqrt{3-at}+\sqrt{bt}=\sqrt{3-3t}+\sqrt{t}=\sqrt{3}\sqrt{1-t}+\sqrt{t}$，…………………………6 分

令 $\sqrt{t}=\sin\theta,0\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2}$，则 $\sqrt{1-t}=\cos\theta$，…………………………………7 分

$\therefore\sqrt{3}\sqrt{1-t}+\sqrt{t}=\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta=2\sin(\theta+\dfrac{\pi}{3})$，…………………………9 分

$\therefore$ 当 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 时，即 $t=\dfrac{1}{4}$ 时，$\sqrt{3-at}+\sqrt{bt}$ 的最大值为 2．………………… 10 分