理科数学参考答案及评分细则

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。

1.D　2.B　3.B　4.A　5.B　6.B　7.C　8.D　9.A　10.D　11.D　12.A

二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。

13.$\{1,7,9\}$　14.$y=(\mathrm{e}-1)x$　15.$-\frac{1}{2}$　16.$\frac{32\sqrt{3}}{9}\pi$

17.【解析】(1)$K^2=\frac{550\times(100\times100-50\times300)^2}{150\times400\times400\times150}\approx3.819>2.706$, ………… 3 分

因此,有 90%的把握认为该校学生选择课外活动类别与性别有关系. ………… 4 分

(2)依题意,ξ 的可能值为 0,1,2,3,4,则

则 $P(\xi=0)=C_2^0\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times C_2^0\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{4}{36}$; ………… 5 分

$P(\xi=1)=C_2^1\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times C_2^0\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+C_2^0\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times C_2^1\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{12}{36}$; ………… 6 分

$P(\xi=2)=C_2^1\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times C_2^1\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+C_2^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times C_2^0\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+C_2^0\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times C_2^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=$

$\frac{13}{36}$; ………… 7 分

$P(\xi=3)=C_2^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times C_2^1\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+C_2^1\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times C_2^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{6}{36}$; ………… 8 分

$P(\xi=4)=C_2^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times C_2^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{36}$. ………… 9 分

所以 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3	4
P	$\frac{4}{36}$或填$\frac{1}{9}$	$\frac{12}{36}$或填$\frac{1}{3}$	$\frac{13}{36}$	$\frac{6}{36}$或填$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$

………… 10 分

所以,$E(\xi)=0\times\frac{4}{36}+1\times\frac{12}{36}+2\times\frac{13}{36}+3\times\frac{6}{36}+4\times\frac{1}{36}=\frac{5}{3}$. ………… 12 分

18.【解析】(1)证明:因为在$\triangle PAC$中,$\angle APC=90^\circ$,$PA=\sqrt{3}$,$PC=\frac{\sqrt{6}}{2}$,

所以 $AC=\frac{3\sqrt{2}}{2}$. ………………………………………………………………………… 1 分

又因为 $\angle PMA=90°$,所以 $AP\cdot PC=AC\cdot PM$.

则 $PM=1,AM=\sqrt{2}$. ……………………………………………………………………………… 2 分

在 $\triangle ABM$ 中,由余弦定理可得 $BM=\sqrt{AB^2+AM^2-2AB\cdot AM\cdot\cos\angle CAB}=2$,

所以 $AM^2+BM^2=AB^2$.

于是 $BM\perp AM,BM\perp AC$. ………………………………………………………………………… 3 分

又 $PM\perp AC$,所以 $AC\perp$ 平面 PBM. ……………………………………………………… 4 分

又因为 $AC\subset$ 平面 ABC,

所以平面 $PBM\perp$ 平面 ABC. …………………………………………………………………… 5 分

(2)因为二面角 $P-AC-B$ 为锐二面角,

平面 $PBM\perp$ 平面 ABC,平面 $PBM\cap$ 平面 $ABC=BM$,

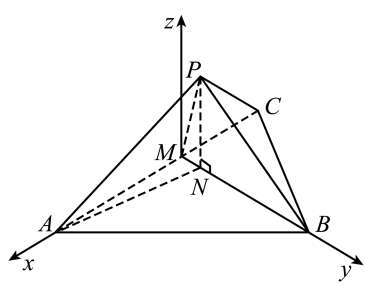
过点 P 作 $PN\perp$ 平面 ABC 于 N 点,则 N 点必在线段 BM 上. ……………………… 6 分

连接 AN,可知 $\angle PAN$ 为 PA 与平面 ABC 所成的角. …………………………………… 7 分

在 $\mathrm{Rt}\triangle PAN$ 中,$\sin\angle PAN=\frac{\sqrt{3}}{5}$,$PA=\sqrt{3}$,得 $PN=\frac{3}{5}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle PMN$ 中,$PM=1$,$PN=\frac{3}{5}$,得 $MN=\frac{4}{5}$. ……………………………………… 8 分

以 M 为坐标原点,建立如图所示空间直角坐标系 $M-xyz$,



则 $A(\sqrt{2},0,0)$,$B(0,2,0)$,$P\left(0,\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$,$M(0,0,0)$.

……………………………………………………………… 9 分

设平面 BAP 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,则 $\begin{cases}\sqrt{2}x-2y=0,\\ \frac{6}{5}y-\frac{3}{5}z=0.\end{cases}$

令 $x=\sqrt{2}$,则得 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{2},1,2)$. ……………………………………………………… 10 分

同理,平面 MAP 即平面 CAP 的一个法向量为

$\boldsymbol{n}=(0,3,-4)$. ……………………………………………………………………………… 11 分

设二面角 $B-AP-C$ 的平面角为 θ,

所以 $|\cos\theta|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{7}}{7}$,即 $\sin\theta=\frac{\sqrt{42}}{7}$.

故二面角 $B-AP-C$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{42}}{7}$. ……………………………………………………… 12 分

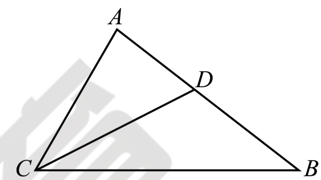
19.【解析】(1)由 $\tan B+\tan C=\dfrac{\sqrt{3}a}{c\cos B}$,根据正弦定理可得

$\dfrac{\sin B}{\cos B}+\dfrac{\sin C}{\cos C}=\dfrac{\sqrt{3}\sin A}{\sin C\cos B}$,…………………………………………………………… 2 分

因为 $\dfrac{\sin B}{\cos B}+\dfrac{\sin C}{\cos C}=\dfrac{\sin B\cos C+\cos B\sin C}{\cos B\cos C}=\dfrac{\sin(B+C)}{\cos B\cos C}=\dfrac{\sin A}{\cos B\cos C}$,

所以 $\dfrac{\sin A}{\cos B\cos C}=\dfrac{\sqrt{3}\sin A}{\sin C\cos B}$,……………………………………………………… 4 分

因为 $0<A<\pi$,$\cos B$ 位于分母,所以 $\sin A\neq 0$,$\cos B\neq 0$,



所以 $\tan C=\sqrt{3}$,

由 $0<C<\pi$,

所以 $C=\dfrac{\pi}{3}$. ……………………………………………………… 6 分

(2)由 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{4}ab=18\sqrt{3}$,

所以 $ab=72$, …………………………………………………………………………… 7 分

又 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ACD}+S_{\triangle BCD}=\dfrac{1}{2}b\cdot CD\cdot\sin\angle ACD+\dfrac{1}{2}a\cdot CD\cdot\sin\angle BCD$,

因为 CD 为角平分线,所以 $\angle ACD=\angle BCD=\dfrac{\pi}{6}$,又 $CD=4\sqrt{3}$,

所以有 $\dfrac{1}{2}b\times 4\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}a\times 4\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}=18\sqrt{3}$,

所以 $a+b=18$,…………………………………………………………………………… 10 分

由余弦定理得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=a^2+b^2-ab$

$=(a+b)^2-3ab=18^2-3\times 72=108$,

所以 $c=6\sqrt{3}$. …………………………………………………………………………… 12 分

20.【解析】(1)由题意得 $F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$.

由 $\overrightarrow{MF}\cdot\overrightarrow{OF}=0$,得 $M\left(\dfrac{p}{2},p\right)$. …………………………………………………… 1 分

从而△OFM 的面积 $S_{\triangle OFM}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{p}{2}\cdot p=1$,则 $p=2$. …………………………………… 3 分

所以,抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$. ………………………………………………………… 4 分

(2)设 $M\left(\dfrac{t^2}{4},t\right)(t>0)$,则 $\overrightarrow{MF}=\left(1-\dfrac{t^2}{4},-t\right)$,$\overrightarrow{OF}=(1,0)$.

由$\overrightarrow{MF}\cdot\overrightarrow{OF}=-3$，得 $1-\frac{t^2}{4}=-3$，即 $t=4$.

所以，此时 $M(4,4)$. …………………………………………………………………… 6 分

由题意可知，l 斜率必不等于 0，于是可设 $l:x=my+n$.

由$\begin{cases}x=my+n,\\y^2=4x\end{cases}$ 可得 $y^2-4my-4n=0$. …………………………………………… 7 分

上述方程的判别式满足 $\Delta=(-4m)^2-4\cdot(-4n)>0$，即 $m^2>-n$.

设 $A\left(\frac{{y_1}^2}{4},y_1\right)$，$B\left(\frac{{y_2}^2}{4},y_2\right)$.

根据韦达定理有：$y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4n$. …………………………………………… 8 分

因为 $k_{MA}\cdot k_{MB}=-2$，

所以$\dfrac{y_1-4}{\frac{{y_1}^2}{4}-4}\cdot\dfrac{y_2-4}{\frac{{y_2}^2}{4}-4}=-2$，$\dfrac{4}{y_1+4}\cdot\dfrac{4}{y_2+4}=-2$，

于是 $y_1y_2+4(y_1+y_2)+24=0$.

所以，$-4n+16m+24=0$，即 $n=4m+6$. …………………………………………… 10 分

故直线 l 的方程为 $x=my+4m+6$，即 $x-6=m(y+4)$，

所以直线 l 恒过定点 $N(6,-4)$. …………………………………………………… 11 分

过点 M 作 $m\perp l$，且 $l\cap m=M_1$，则 $|MM_1|\leqslant|MN|=2\sqrt{17}$.

其中，当 $MN\perp l$ 时等号成立.

所以，点 M 到直线 l 的距离的最大值为 $2\sqrt{17}$. …………………………………… 12 分

21.【解析】(1)由 $f(x)=e^x-ax-2$，得 $f'(x)=e^x-a$，

当 $a\leqslant0$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$单调递增，$f(x)$不存在极值. ………………………… 1 分

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，则 $x=\ln a$，

若 $x<\ln a$，则 $f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；若 $x>\ln a$，则 $f'(x)>0$，$f(x)$单调递增.

所以 $x=\ln a$ 是 $f(x)$的极小值点. ………………………………………………… 3 分

因为 $f(x)$在区间$(0,1)$存在极值，则 $0<\ln a<1$，即 $1<a<e$.

所以，$f(x)$在区间$(0,1)$存在极值时，a 的取值范围是$(1,e)$. ……………………… 4 分

(2)由 $f(x)>x-\sin x-\cos x$ 在 $x\in(0,+\infty)$时恒成立，

即 $e^x+\cos x+\sin x-(a+1)x-2>0$ 在 $x\in(0,+\infty)$时恒成立. ………………… 5 分

设 $g(x)=e^x+\cos x+\sin x-(a+1)x-2$，则 $g(x)>0$ 在 $x\in(0,+\infty)$时恒成立，

则 $g'(x)=e^x-\sin x+\cos x-(a+1)$，

令 $m(x)=g'(x)=e^x-\sin x+\cos x-(a+1)$，则 $m'(x)=e^x-\cos x-\sin x$.

令 $n(x)=m'(x)=e^x-\cos x-\sin x$，则 $n'(x)=e^x+\sin x-\cos x$，

则 $x\in(0,1)$时，$e^x+\sin x>1$，则 $n'(x)=e^x+\sin x-\cos x>0$；$x\in[1,+\infty)$时，$e^x\geqslant e$，

则$n'(x)>0$，

所以 $x\in(0,+\infty)$时，$n'(x)>0$，则 $n(x)$即 $m'(x)$单调递增，

所以 $m'(x)>m'(0)=0$，则 $m(x)$即 $g'(x)$单调递增，

所以 $g'(x)>g'(0)=1-a$. …………………………………………………………………… 7 分

①当 $a\leqslant 1$ 时，$g'(0)=1-a\geqslant 0$，故 $x\in(0,+\infty)$，$g'(x)>0$，则 $g(x)$单调递增.

所以 $g(x)>g(0)=0$，

所以 $f(x)>x-\sin x-\cos x$ 在 $x\in(0,+\infty)$时恒成立. ……………………………………… 9 分

②当 $a>1$ 时，$g'(0)=1-a<0$，

$g'[\ln(a+3)]=a+3-\sin[\ln(a+3)]+\cos[\ln(a+3)]-(a+1)$

$=2-\sqrt{2}\sin\left[\ln(a+3)-\frac{\pi}{4}\right]>0$，

故在区间$(0,\ln(a+3))$上函数 $g'(x)$存在零点 x_0，即 $g'(x_0)=0$，………………………… 10 分

由于函数 $g'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，则 $x\in(0,x_0)$时，$g'(x)<g'(x_0)=0$，

故函数 $g(x)$在区间$(0,x_0)$上单调递减，

所以，当 $x\in(0,x_0)$时，函数 $g(x)<g(0)=0$，不合题意.

综上所述，a 的取值范围为$(-\infty,1]$. ………………………………………………………… 12 分

选考题

22.【解析】(1)由$\begin{cases}x=1+2\cos\alpha,\\y=2\sin\alpha\end{cases}$知$(x-1)^2=4\cos^2\alpha$，$y^2=4\sin^2\alpha$，

则曲线 C 的普通方程为$(x-1)^2+y^2=4$. ……………………………………………………… 2 分

因为直线 l 的方程为$\rho\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，即 $\rho\sin\theta-\rho\cos\theta=3$.

由$\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\y=\rho\sin\theta\end{cases}$可得 $x-y+3=0$.

所以直线 l 的直角坐标方程为 $x-y+3=0$. ………………………………………………… 4 分

(2)由(1)可知，点 A 的坐标为$(-3,0)$.

因为$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$，所以 M 是线段 AB 的中点. ……………………………………………… 5 分

由题意，可设 $M(x,y)$，$B(1+2\cos\alpha,2\sin\alpha)$，

则$\begin{cases}2x=(1+2\cos\alpha)+(-3),\\2y=2\sin\alpha+0,\end{cases}$

即$\begin{cases}x=\cos\alpha-1,\\y=\sin\alpha.\end{cases}$ …………………………………………………………………………… 7 分

代入曲线 C 的方程,可得

$(\cos\alpha-1-1)^2+\sin^2\alpha=4$,即 $\cos^2\alpha-4\cos\alpha+4+\sin^2\alpha=4$.

解之可得,$\cos\alpha-1=-\frac{3}{4}$. ………………………………………………………………………… 9 分

此时,$\sin\alpha=\pm\frac{\sqrt{15}}{4}$.

由此可知,两曲线有两个公共点,其直角坐标为$\left(-\frac{3}{4},\pm\frac{\sqrt{15}}{4}\right)$. ………………………… 10 分

23.【解析】(1)不存在 a,b,c,使得$\frac{1}{a}+\frac{9}{b+c}\in(0,5)$.理由如下:

因为 a,b,c 都是正数,且 $a+b+c=3$,所以 $b+c=3-a>0$,

所以$\frac{1}{a}+\frac{9}{b+c}=\frac{1}{a}+\frac{9}{3-a}=\frac{1}{3}[a+(3-a)]\left(\frac{1}{a}+\frac{9}{3-a}\right)$

$=\frac{1}{3}\left(10+\frac{3-a}{a}+\frac{9a}{3-a}\right)\geqslant\frac{1}{3}\left(10+2\sqrt{\frac{3-a}{a}\cdot\frac{9a}{3-a}}\right)=\frac{16}{3}$,

当且仅当$\frac{3-a}{a}=\frac{9a}{3-a}$,即 $a=\frac{3}{4}$,$b+c=\frac{9}{4}$时取等号,

即$\frac{1}{a}+\frac{9}{b+c}$的最小值为$\frac{16}{3}$,

所以,不存在 a,b,c,使得$\frac{1}{a}+\frac{9}{b+c}\in(0,5)$. ……………………………………………… 5 分

(2)【证明】$(\sqrt{3+a}+\sqrt{3+b}+\sqrt{3+c})^2$

$=9+(a+b+c)+2\sqrt{3+a}\cdot\sqrt{3+b}+2\sqrt{3+b}\cdot\sqrt{3+c}+2\sqrt{3+a}\cdot\sqrt{3+c}$

$\leqslant12+(3+a)+(3+b)+(3+b)+(3+c)+(3+a)+(3+c)$

$=30+2(a+b+c)$

$=36$.

当且仅当 $a=b=c=1$ 时等号成立,

所以 $\sqrt{3+a}+\sqrt{3+b}+\sqrt{3+c}\leqslant6$. ……………………………………………………… 10 分