秘密 ★ 启用前

雅安市高2021级第二次诊断性考试

数　学(理科)

本试卷满分150分，考试时间120分钟。

注意事项：

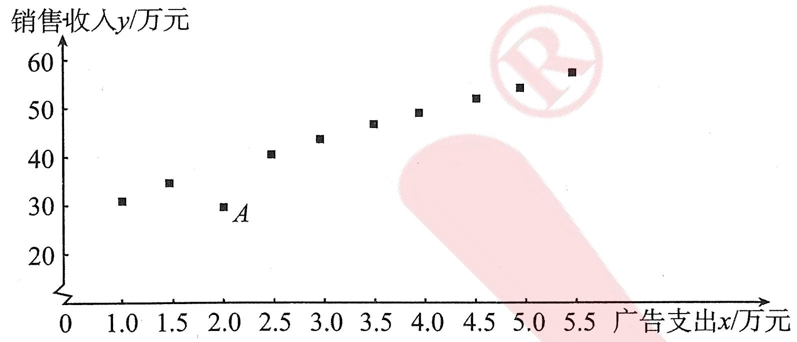
1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、座位号和准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 复数 $z=\frac{1+3i}{1-i}-i$，则 $|z|=$

A. $\sqrt{13}$　　B. $\sqrt{5}$　　C. 2　　D. $\sqrt{2}$

2. 某公司收集了某商品销售收入 y(万元)与相应的广告支出 x(万元)共10组数据 $(x_i,y_i)(i=1,2,3,\cdots,10)$，绘制出如下散点图，并利用线性回归模型进行拟合.



若将图中10个点中去掉 A 点后再重新进行线性回归分析，则下列说法正确的是

A. 决定系数 R^2 变小　　B. 残差平方和变小

C. 相关系数 r 的值变小　　D. 解释变量 x 与预报变量 y 相关性变弱

3. $\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^5$ 的展开式中 x^4 的系数为

A. 80　　B. 40　　C. 10　　D. -40

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，$a_{n+1}=\frac{a_n-1}{a_n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$，则 $a_{2024}=$

A. -3　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. 2

5. 已知 D,E 分别为△ABC 的边 AB,AC 的中点，若 $\overrightarrow{DE}=(3,4)$，$B(-2,-3)$，则点 C 的坐标为

A. $(1,1)$　　B. $(4,5)$　　C. $(-5,-7)$　　D. $(-8,-11)$

6. 已知平面区域 $\Omega=\begin{cases}x+y-4\leqslant 0,\\ x-y-2\leqslant 0,\\ x\geqslant 0,\end{cases}$ 圆 $C:(x-a)^2+(y-b)^2=1$，若圆心 $C\in\Omega$，且圆 C 与 y 轴相切，则 $a+b$ 的最大值为

A. 10　　B. 4　　C. 2　　D. 0

7. 某校甲、乙、丙、丁4个小组到 A,B,C 这3个劳动实践基地参加实践活动，每个小组选择一个基地，则每个基地至少有1个小组的概率为

A. $\frac{2}{9}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{4}{9}$　　D. $\frac{8}{9}$

8. 已知函数 $f(x)=\cos 2x+\sin 2x$，则下列说法中，正确的是

A. $f(x)$ 的最小值为 -1

B. $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增

C. $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{8},0\right)$ 对称

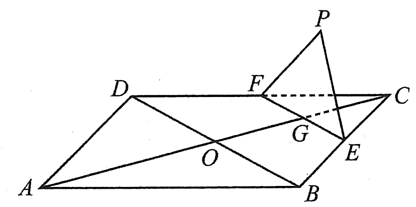
D. $f(x)$ 的图象可由 $g(x)=\sqrt{2}\cos 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位得到

9. 如图，菱形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 交于点 O，EF 是△BCD 的中位线，AC 与 EF 交于点 G，已知△PEF 是△CEF 绕 EF 旋转过程中的一个图形，且 $P\notin$ 平面 $ABCD$. 给出下列结论：

①BD∥平面 PEF；

②平面 $PAC\perp$ 平面 $ABCD$；

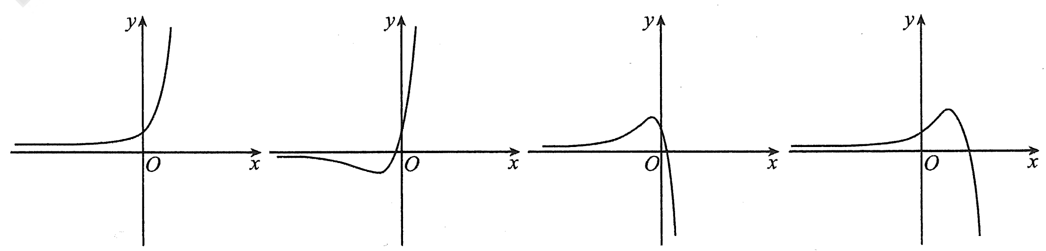
③二面角 $P-EF-C$ 的平面角是直线 OP 与平面 $ABCD$ 所成角的2倍.



其中所有正确结论的序号为

A. ①②③　　B. ①②　　C. ①③　　D. ②③

10. 已知函数 $f(x)=(ax+1)e^x$，给出下列4个图象：



①　　②　　③　　④

其中，可以作为函数 $f(x)$ 的大致图象的个数为

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

11. 已知 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$ 分别是双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，过 F_1 的直线与圆 $(x-\frac{1}{2}c)^2+y^2=c^2$ 相切，与 C 在第一象限交于点 P，且 $PF_2\perp x$ 轴，则 C 的离心率为

A. 3　　B. $2\sqrt{5}$　　C. 2　　D. $\sqrt{5}$

12. 已知 a,b,c 均为正数，且 $\frac{1}{a}=2a-\log_2(a+1)^2$，$b=\left(b^2-\frac{1}{2}\right)4^{b-1}$，$c=\frac{c}{e^{c-1}}+\frac{1}{2c}$，则 a,b,c 的大小关系为

A. $b<c<a$　　B. $b<a<c$　　C. $c<a<b$　　D. $c<b<a$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13.已知集合 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，$A=\{2,4,6,8\}$，$B=\{3,4,5,6\}$，则 $\complement_U(A\cup B)=$______.

14.已知 $f(x)=e^x-x$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为______.

15.已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $\frac{2\pi}{3}$，集合 $S=\{x|x=\cos a_n,n\in\mathbf{N}^*\}$ 有且仅有两个元素，则这两个元素的积为______.

16.一个圆锥的顶点和底面圆都在半径为 2 的球体表面上，当圆锥的体积最大时，其侧面积为______.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生依据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

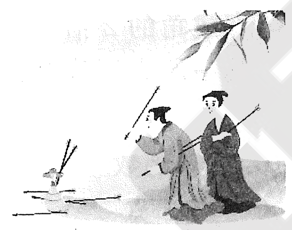
17.（12 分）

某校在课外活动期间设置了文化艺术类活动和体育锻炼类活动，为了解学生对这两类活动的参与情况，统计了如下数据：

	文化艺术类	体育锻炼类	合计
男	100	300	400
女	50	100	150
合计	150	400	550

（1）通过计算判断，有没有 90% 的把握认为该校学生所选择课外活动的类别与性别有关系？

（2）“投壶”是中国古代宴饮时做的一种投掷游戏，也是一种礼仪. 该校文化艺术类课外活动中，设置了一项“投壶”活动. 已知甲、乙两人参加投壶活动，投中 1 只得 1 分，未投中不得分，据以往数据，甲每只投中的概率为 $\frac{1}{3}$，乙每只投中的概率为 $\frac{1}{2}$，若甲、乙两人各投 2 只，记两人所得分数之和为 ξ，求 ξ 的分布列和数学期望.



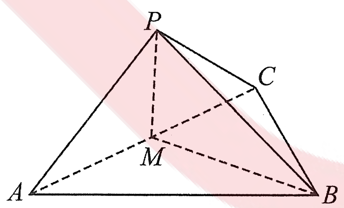
附表及公式：

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635

其中 $K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$.

18.（12 分）

如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，M 为 AC 边上的一点，$\angle APC=\angle PMA=90°$，$\cos\angle CAB=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$AB=2PC=\sqrt{6}$，$PA=\sqrt{3}$.



（1）证明：平面 $PBM\perp$ 平面 ABC；

（2）若直线 PA 与平面 ABC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{5}$，且二面角 $P-AC-B$ 为锐二面角，求二面角 $B-AP-C$ 的正弦值.

19.（12 分）

已知△ABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且 $\tan B+\tan C=\frac{\sqrt{3}a}{c\cos B}$.

（1）求角 C；

（2）若 CD 是∠ACB 的角平分线，$CD=4\sqrt{3}$，△ABC 的面积为 $18\sqrt{3}$，求 c 的值.

20.（12 分）

在直角坐标系 xOy 中，设 F 为抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点，M 为 C 上位于第一象限内一点. 当 $\overrightarrow{MF}\cdot\overrightarrow{OF}=0$ 时，△OFM 的面积为 1.

（1）求 C 的方程；

（2）当 $\overrightarrow{MF}\cdot\overrightarrow{OF}=-3$ 时，如果直线 l 与抛物线 C 交于 A,B 两点，直线 MA,MB 的斜率满足 $k_{MA}\cdot k_{MB}=-2$，试探究点 M 到直线 l 的距离的最大值.

21.（12 分）

已知函数 $f(x)=e^x-ax-2$.

（1）若 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 存在极值，求 a 的取值范围；

（2）若 $x\in(0,+\infty)$，$f(x)>x-\sin x-\cos x$，求 a 的取值范围.

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题记分。

22.[选修 4－4：坐标系与参数方程]（10 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+2\cos\alpha,\\ y=2\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数）. 以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $\rho\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

（1）求 C 的普通方程和 l 的直角坐标方程；

（2）设直线 l 与 x 轴相交于点 A，动点 B 在 C 上，点 M 满足 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$，点 M 的轨迹为 E，试判断曲线 C 与曲线 E 是否有公共点. 若有公共点，求出其直角坐标；若没有公共点，请说明理由.

23.[选修 4－5：不等式选讲]（10 分）

已知 a,b,c 均为正数，且 $a+b+c=3$.

（1）是否存在 a,b,c，使得 $\frac{1}{a}+\frac{9}{b+c}\in(0,5)$，说明理由；

（2）证明：$\sqrt{3+a}+\sqrt{3+b}+\sqrt{3+c}\leqslant 6$.