文科数学参考答案及评分细则

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。

1. C　2. D　3. B　4. A　5. A　6. B　7. C　8. D　9. B　10. D　11. D　12. B

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. -4　14. $y=x$　15. $2^{n+1}-n-2$　16. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

17.【解析】(1) $K^2=\frac{550\times(100\times100-50\times300)^2}{150\times400\times400\times150}\approx3.819>2.706$， …………………… 4 分

因此，有 90% 的把握认为该校学生选择课外活动类别与性别有关系. …………………… 6 分

(2) 这 6 名同学中女生有 2 名，记为 A_1,A_2，男生有 4 名，记为 B_1,B_2,B_3,B_4.

从这 6 名同学中随机抽取 2 名的所有基本事件有：(A_1,A_2)，(A_1,B_1)，(A_1,B_2)，(A_1,B_3)，(A_1,B_4)，(A_2,B_1)，(A_2,B_2)，(A_2,B_3)，(A_2,B_4)，(B_1,B_2)，(B_1,B_3)，(B_1,B_4)，(B_2,B_3)，(B_2,B_4)，(B_3,B_4)，共 15 个.

其中，至少有 1 名女生的基本事件有 9 个.

所以，所抽取的 2 名同学中至少有 1 名女生的概率为 $\frac{9}{15}$ 即 $\frac{3}{5}$. …………………… 12 分

18.【解析】(1) 证明：因为在 $\triangle PAC$ 中，$\angle APC=90^\circ$，$PA=\sqrt{3}$，$PC=\frac{\sqrt{6}}{2}$，

所以 $AC=\frac{3\sqrt{2}}{2}$. …………………… 1 分

又因为 $\angle PMA=90^\circ$，所以 $AP\cdot PC=AC\cdot PM$，

所以 $PM=1$，$AM=\sqrt{2}$. …………………… 2 分

在 $\triangle ABM$ 中，由余弦定理可得 $BM=\sqrt{AB^2+AM^2-2AB\cdot AM\cdot\cos\angle CAB}=2$，

所以 $AM^2+BM^2=AB^2$.

因此，$BM\perp AM$，即 $BM\perp AC$. …………………… 4 分

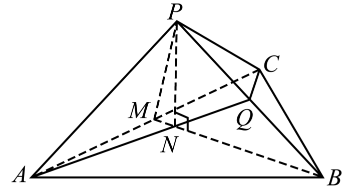
又 $PM\perp AC$，

所以 $AC\perp$ 平面 PBM. …………………… 6 分

(2) 因为点 Q 为边 PB 的中点，

所以 $V_{P-ACQ}=\frac{1}{2}V_{P-ABC}$. …………………… 7 分

由(1)知 $AC\perp$平面 PBM，



而 $AC\subset$平面 ABC，所以平面 $PBM\perp$平面 ABC.

又平面 $PBM\cap$平面 $ABC=BM$，

过点 P 作 $PN\perp$平面 ABC 于 N 点，则 N 点必在直线 BM 上.

于是，当点 M 与点 N 重合时，点 P 到平面 ABC 的距离最大，

且最大距离为 $|PM|=1$. ………………………………………………………… 9 分

因为 $AC=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，$BM=2$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|BM|=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$， ………………………………………………… 10 分

故 $V_{P-ACQ}\leqslant\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\times1=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$， ………………………………………………… 11 分

所以三棱锥 $P-ACQ$ 的体积有最大值，最大值为$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. ………………………………… 12 分

19.【解析】(1)由 $2a\cos C-c\cos B=b\cos C$ 得 $2a\cos C=c\cos B+b\cos C$，

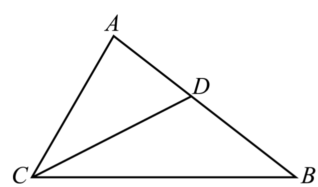
根据正弦定理可得 $2\sin A\cos C=\sin C\cos B+\sin B\cos C$，……………………………… 2 分

因为 $\sin C\cos B+\sin B\cos C=\sin(B+C)=\sin A$，

所以 $2\sin A\cos C=\sin A$， …………………………………………………………… 4 分

因为 $0<A<\pi$，所以 $\sin A\neq0$，

所以 $\cos C=\dfrac{1}{2}$，



由 $0<C<\pi$，

所以 $C=\dfrac{\pi}{3}$. ……………………………………………………… 6 分

(2)由 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{4}ab=18\sqrt{3}$，

所以 $ab=72$， ………………………………………………………………………… 7 分

又 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ACD}+S_{\triangle BCD}=\dfrac{1}{2}b\cdot CD\cdot\sin\angle ACD+\dfrac{1}{2}a\cdot CD\cdot\sin\angle BCD$，

因为 CD 为角平分线，所以$\angle ACD=\angle BCD=\dfrac{\pi}{6}$，又 $CD=4\sqrt{3}$，

所以有$\dfrac{1}{2}b\times4\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}a\times4\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}=18\sqrt{3}$，

所以 $a+b=18$，……………………………………………………………………… 10 分

由余弦定理得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=a^2+b^2-ab$

$=(a+b)^2-3ab=18^2-3\times72=108$,

所以 $c=6\sqrt{3}$. ………………………………………………………………………… 12 分

20.【解析】(1)由题意得 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$.

由$\overrightarrow{MF}\cdot\overrightarrow{OF}=0$,得 $M\left(\frac{p}{2},p\right)$. ………………………………………………………… 1 分

从而△OFM 的面积 $S_{\triangle OFM}=\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{2}\cdot p=1$,则 $p=2$. ……………………………………… 3 分

所以,抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$. ………………………………………………………………… 4 分

(2)设 $M\left(\frac{t^2}{4},t\right)(t>0)$,则$\overrightarrow{MF}=\left(1-\frac{t^2}{4},-t\right)$,$\overrightarrow{OF}=(1,0)$.

由$\overrightarrow{MF}\cdot\overrightarrow{OF}=-3$,得 $1-\frac{t^2}{4}=-3$,即 $t=4$.

所以,此时 $M(4,4)$. …………………………………………………………………………… 6 分

由题意可知,l 斜率必不等于 0,于是可设 l:$x=my+n$.

由$\begin{cases}x=my+n,\\ y^2=4x\end{cases}$ 可得 $y^2-4my-4n=0$. ……………………………………………… 7 分

上述方程的判别式满足 $\Delta=(-4m)^2-4\cdot(-4n)>0$,即 $m^2>-n$.

设 $A\left(\frac{{y_1}^2}{4},y_1\right)$,$B\left(\frac{{y_2}^2}{4},y_2\right)$.

根据韦达定理有:$y_1+y_2=4m$,$y_1y_2=-4n$. …………………………………………………… 8 分

因为 $k_{MA}\cdot k_{MB}=-2$,

所以$\dfrac{y_1-4}{\frac{{y_1}^2}{4}-4}\cdot\dfrac{y_2-4}{\frac{{y_2}^2}{4}-4}=-2$,$\dfrac{4}{y_1+4}\cdot\dfrac{4}{y_2+4}=-2$,

于是 $y_1y_2+4(y_1+y_2)+24=0$.

所以,$-4n+16m+24=0$,即 $n=4m+6$. …………………………………………………… 10 分

故直线 l 的方程为 $x=my+4m+6$,即 $x-6=m(y+4)$,

所以直线 l 恒过定点 $N(6,-4)$. ……………………………………………………………… 12 分

21.【解析】(1)由 $f(x)=e^x-ax-1$,得 $f'(x)=e^x-a$, …………………………………………… 1 分

当 $a\leqslant0$ 时,$f'(x)>0$,则 $f(x)$单调递增,$f(x)$不存在极值. ……………………………… 2 分

当 $a>0$ 时,令 $f'(x)=0$,则 $x=\ln a$,

若 $x<\ln a$,则 $f'(x)<0$,$f(x)$单调递减;若 $x>\ln a$,则 $f'(x)>0$,$f(x)$单调递增.

所以 $x=\ln a$ 是 $f(x)$的极小值点.

所以，当 $a>0$ 时，$f(x)$ 存在极值，

综上所述，$f(x)$ 存在极值时，a 的取值范围是 $(0,+\infty)$. …………………………………… 4 分

(2)欲证不等式 $f(x)>x-\sin x$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 时恒成立，

只需证明 $e^x+\sin x-(a+1)x-1>0$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 时恒成立. ………………………… 5 分

设 $g(x)=e^x+\sin x-(a+1)x-1$，

则 $g'(x)=e^x+\cos x-(a+1)$，

令 $m(x)=g'(x)=e^x+\cos x-(a+1)$，则 $m'(x)=e^x-\sin x$.

可知，$x\in(0,+\infty)$ 时，$m'(x)>0$，

则 $m(x)$ 即 $g'(x)$ 单调递增，

所以 $g'(x)>g'(0)=1-a$. ………………………………………………………………… 8 分

因为 $a\leqslant 1$，所以 $g'(0)=1-a\geqslant 0$，

故 $x\in(0,+\infty)$，$g'(x)>0$，则 $g(x)$ 单调递增.

所以 $g(x)>g(0)=0$，

即 $a\leqslant 1$，$x\in(0,+\infty)$ 时，不等式 $f(x)>x-\sin x$ 恒成立. …………………………… 12 分

选考题

22.【解析】(1)由 $\begin{cases}x=1+2\cos\alpha,\\ y=2\sin\alpha\end{cases}$ 知 $(x-1)^2=4\cos^2\alpha$，$y^2=4\sin^2\alpha$，

则曲线 C 的普通方程为 $(x-1)^2+y^2=4$. …………………………………………… 2 分

因为直线 l 的方程为 $\rho\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，即 $\rho\sin\theta-\rho\cos\theta=3$.

由 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$ 可得 $x-y+3=0$.

所以直线 l 的直角坐标方程为 $x-y+3=0$. …………………………………………… 4 分

(2)由(1)可知，点 A 的坐标为 $(-3,0)$.

因为 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$，所以 M 是线段 AB 的中点. ………………………………………… 5 分

由题意，可设 $M(x,y)$，$B(1+2\cos\alpha,2\sin\alpha)$，

则 $\begin{cases}2x=(1+2\cos\alpha)+(-3),\\ 2y=2\sin\alpha+0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}x=\cos\alpha-1,\\ y=\sin\alpha.\end{cases}$ …………………………………………………………………… 7 分

代入曲线 C 的方程，可得

$(\cos\alpha-1-1)^2+\sin^2\alpha=4$，即 $\cos^2\alpha-4\cos\alpha+4+\sin^2\alpha=4$.

解之可得，$\cos\alpha-1=-\frac{3}{4}$. ………………………………………………………… 9 分

此时，$\sin\alpha=\pm\frac{\sqrt{15}}{4}$.

由此可知，两曲线有两个公共点，其直角坐标为 $\left(-\frac{3}{4},\pm\frac{\sqrt{15}}{4}\right)$. ………………………… 10 分

23.【解析】(1)不存在 a,b,c，使得 $\frac{1}{a}+\frac{9}{b+c}\in(0,5)$. 理由如下：

因为 a,b,c 都是正数，且 $a+b+c=3$，所以 $b+c=3-a>0$，

所以 $\frac{1}{a}+\frac{9}{b+c}=\frac{1}{a}+\frac{9}{3-a}=\frac{1}{3}[a+(3-a)]\left(\frac{1}{a}+\frac{9}{3-a}\right)$

$=\frac{1}{3}\left(10+\frac{3-a}{a}+\frac{9a}{3-a}\right)\geqslant\frac{1}{3}\left(10+2\sqrt{\frac{3-a}{a}\cdot\frac{9a}{3-a}}\right)=\frac{16}{3}$，

当且仅当 $\frac{3-a}{a}=\frac{9a}{3-a}$，即 $a=\frac{3}{4}$，$b+c=\frac{9}{4}$ 时取等号，

即 $\frac{1}{a}+\frac{9}{b+c}$ 的最小值为 $\frac{16}{3}$，

所以，不存在 a,b,c，使得 $\frac{1}{a}+\frac{9}{b+c}\in(0,5)$. ………………………………………………………… 5 分

(2)【证明】

$(\sqrt{3+a}+\sqrt{3+b}+\sqrt{3+c})^2$

$=9+(a+b+c)+2\sqrt{3+a}\cdot\sqrt{3+b}+2\sqrt{3+b}\cdot\sqrt{3+c}+2\sqrt{3+a}\cdot\sqrt{3+c}$

$\leqslant 12+(3+a)+(3+b)+(3+b)+(3+c)+(3+a)+(3+c)$

$=30+2(a+b+c)$

$=36$.

当且仅当 $a=b=c=1$ 时等号成立，

所以 $\sqrt{3+a}+\sqrt{3+b}+\sqrt{3+c}\leqslant 6$. ………………………………………………………… 10 分