秘密 ★ 启用前

雅安市高 2021 级第二次诊断性考试

数　学（文科）

本试卷满分 150 分，考试时间 120 分钟。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、座位号和准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

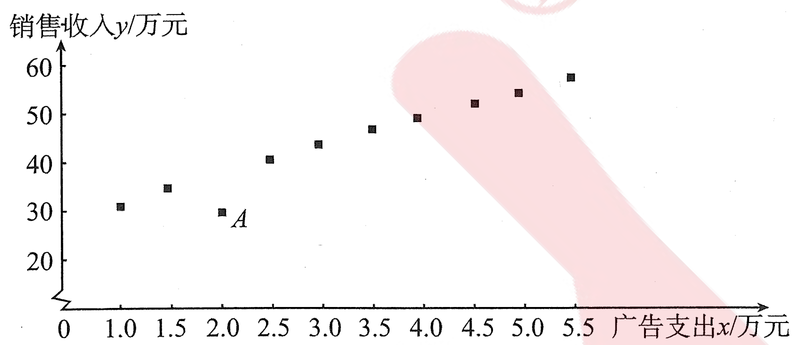
1. 已知集合 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，$A=\{2,4,6,8\}$，$B=\{3,4,5,6\}$，则 $\complement_U(A\cup B)=$

A. $\{1,9\}$　　B. $\{1,7\}$　　C. $\{1,7,9\}$　　D. $\{2,3,4,5,6,8\}$

2. 复数 $z=\frac{1+3i}{1-i}-i$，则 $|z|=$

A. $\sqrt{13}$　　B. $\sqrt{5}$　　C. 2　　D. $\sqrt{2}$

3. 某公司收集了某商品销售收入 y（万元）与相应的广告支出 x（万元）共 10 组数据 (x_i,y_i)（$i=1,2,3,\cdots,10$），绘制出如下散点图，并利用线性回归模型进行拟合.



若将图中 10 个点中去掉 A 点后再重新进行线性回归分析，则下列说法正确的是

A. 决定系数 R^2 变小　　B. 残差平方和变小

C. 相关系数 r 的值变小　　D. 解释变量 x 与预报变量 y 相关性变弱

4. 已知 D,E 分别为 $\triangle ABC$ 的边 AB,AC 的中点，若 $\overrightarrow{DE}=(3,4)$，$B(-2,-3)$，则点 C 的坐标为

A. $(4,5)$　　B. $(1,1)$　　C. $(-5,-7)$　　D. $(-8,-11)$

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，$a_{n+1}=\frac{a_n-1}{a_n+1}$（$n\in\mathbf{N}^*$），则 $a_{2024}=$

A. -3　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. 2

6. 已知平面区域 $\Omega=\begin{cases}x+y-4\leqslant 0,\\ x-y-2\leqslant 0,\\ x\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $x-2y$ 的最大值为

A. 8　　B. 4　　C. 3　　D. 2

7. 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 随机取 1 个数 x，则 x 使得 $\sin x+\cos x>\frac{\sqrt{6}}{2}$ 的概率为

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{3}{4}$

8. 已知函数 $f(x)=\cos 2x+\sin 2x$，则下列说法中，正确的是

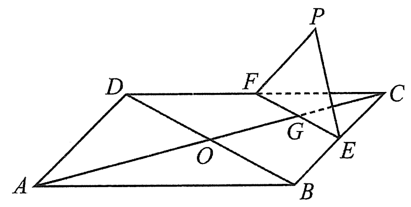
A. $f(x)$ 的最小值为 -1

B. $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增

C. $f(x)$ 的最小正周期为 2π

D. $f(x)$ 的图象可由 $g(x)=\sqrt{2}\cos 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位得到

9. 如图，菱形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 交于点 O，EF 是 $\triangle BCD$ 的中位线，AC 与 EF 交于点 G，已知 $\triangle PEF$ 是 $\triangle CEF$ 绕 EF 旋转过程中的一个图形，且 $P\notin$ 平面 $ABCD$. 给出下列结论：



①$BD\parallel$ 平面 PEF；

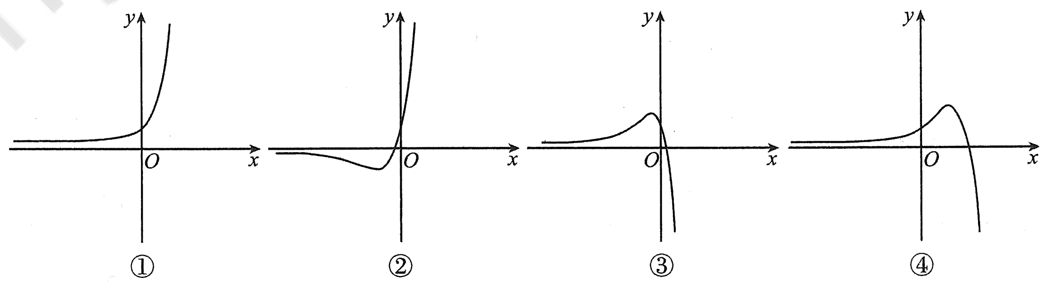
②平面 $PAC\perp$ 平面 $ABCD$；

③“直线 $PF\perp$ 直线 AC”始终不成立.

其中所有正确结论的序号为

A. ①②③　　B. ①②　　C. ①③　　D. ②③

10. 已知函数 $f(x)=(ax+1)e^x$，给出下列 4 个图象：



其中，可以作为函数 $f(x)$ 的大致图象的个数为

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

11. 已知 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$ 分别是双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左右焦点，若过 F_1 的直线与圆 $(x-\frac{1}{2}c)^2+y^2=c^2$ 相切，与 C 在第一象限交于点 P，且 $PF_2\perp x$ 轴，则 C 的离心率为

A. $2\sqrt{5}$　　B. 3　　C. $\frac{5}{2}$　　D. $\sqrt{5}$

12. 已知 a,b,c 均为正数，且 $a=1+\frac{4}{a}-2^a$，$b^2=4+b(2-3^b)$，$\frac{4-c^2}{c}=\log_4(c+3)$，则 a,b,c 的大小关系为

A. $b<c<a$　　B. $b<a<c$　　C. $a<c<b$　　D. $a<b<c$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}4^x, x\leqslant 0,\\ \log_2 x, x>0.\end{cases}$ 则 $f[f(-2)]$的值为______.

14. 已知 $f(x)=x^2-x+1$，则曲线 $y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为______.

15. 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $a_1=1, a_{n+1}-a_n=2^n$，则 $S_n=$______.

16. 一个圆锥的顶点和底面圆都在半径为 2 的球体表面上，当圆锥的体积最大时，其底面圆的半径为______.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生依据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.（12 分）

某校在课外活动期间设置了文化艺术类活动和体育锻炼类活动，为了解学生对这两类活动的参与情况，统计了如下数据：

	文化艺术类	体育锻炼类	合计
男	100	300	400
女	50	100	150
合计	150	400	550

（1）通过计算判断，有没有 90％的把握认为该校学生所选择课外活动的类别与性别有关系？

（2）为收集学生对课外活动建议，在参加文化艺术类活动的学生中按性别用分层抽样的方法抽取了 6 名同学．若在这 6 名同学中随机抽取 2 名，求所抽取的 2 名同学中至少有 1 名女生的概率．

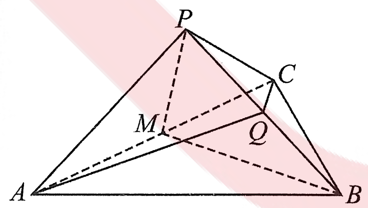
附表及公式：

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635

其中 $K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$.

18.（12 分）

如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，M 为 AC 边上的一点，$\angle APC=\angle PMA=90°$，$\cos\angle CAB=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$AB=2PC=\sqrt{6}$，$PA=\sqrt{3}$.



（1）证明：$AC\perp$平面 PBM；

（2）设点 Q 为边 PB 的中点，试判断三棱锥 $P-ACQ$ 的体积是否有最大值？如果有，请求出最大值；如果没有，请说明理由．

19.（12 分）

已知$\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且 $2a\cos C-c\cos B=b\cos C$.

（1）求角 C；

（2）若 CD 是$\angle ACB$ 的角平分线，$CD=4\sqrt{3}$，$\triangle ABC$ 的面积为 $18\sqrt{3}$，求 c 的值．

20.（12 分）

在直角坐标系 xOy 中，设 F 为抛物线 $C: y^2=2px(p>0)$的焦点，M 为 C 上位于第一象限内一点．当$\overrightarrow{MF}\cdot\overrightarrow{OF}=0$ 时，$\triangle OFM$ 的面积为 1．

（1）求 C 的方程；

（2）当$\overrightarrow{MF}\cdot\overrightarrow{OF}=-3$ 时，如果直线 l 与抛物线 C 交于 A,B 两点，直线 MA,MB 的斜率满足 $k_{MA}\cdot k_{MB}=-2$．证明直线 l 是恒过定点，并求出定点坐标．

21.（12 分）

已知函数 $f(x)=e^x-ax-1$.

（1）若 $f(x)$存在极值，求 a 的取值范围；

（2）若 $a\leqslant 1$，$x\in(0,+\infty)$，证明：$f(x)>x-\sin x$.

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题记分。

22.［选修 4－4：坐标系与参数方程］（10 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为$\begin{cases}x=1+2\cos\alpha,\\ y=2\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数）．以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $\rho\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

（1）求 C 的普通方程和 l 的直角坐标方程；

（2）设直线 l 与 x 轴相交于点 A，动点 B 在 C 上，点 M 满足$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$，点 M 的轨迹为 E，试判断曲线 C 与曲线 E 是否有公共点．若有公共点，求出其直角坐标；若没有公共点，请说明理由．

23.［选修 4－5：不等式选讲］（10 分）

已知 a,b,c 均为正数，且 $a+b+c=3$.

（1）是否存在 a,b,c，使得$\dfrac{1}{a}+\dfrac{9}{b+c}\in(0,5)$，说明理由；

（2）证明：$\sqrt{3+a}+\sqrt{3+b}+\sqrt{3+c}\leqslant 6$.