宜宾市普通高中2021级第二次诊断性测试

文科数学

(考试时间:120分钟　　全卷满分:150分)

注意事项:

1.答卷前,考生务必用黑色签字笔将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号填写在答题卡上,并认真核准条形码上的准考证号、姓名、考场号、座位号及科目,在规定的位置贴好条形码.

2.回答选择题时,选出每小题答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦擦干净后,再选涂其它答案标号. 回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效.

3.考试结束后,将答题卡交回.

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合要求.

1. 已知集合 $A=\{x|-3<x<3\}$, $B=\{x|-1<x<4\}$,则 $A\cap B=$

A. $\{x|-3<x<4\}$　B. $\{x|-1<x<3\}$　C. $\{x|-3<x<-1\}$　D. $\{x|-1<x<4\}$

2. 命题“$\forall x>1$, $\ln x>0$”的否定是

A. $\forall x>1$, $\ln x<0$　　B. $\forall x>1$, $\ln x\leqslant 0$

C. $\exists x>1$, $\ln x\leqslant 0$　　D. $\exists x\leqslant 1$, $\ln x\leqslant 0$

3. 盒中装有形状大小完全相同的3个小球,其中1个白球、2个红球,从中依次不放回地随机摸出2个球,则两次都摸出红球的概率为

A. $\frac{1}{3}$　B. $\frac{1}{2}$　C. $\frac{2}{3}$　D. $\frac{5}{6}$

4. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$, $\boldsymbol{b}=(3,1)$,向量 $\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}\parallel(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b})$,则 $\boldsymbol{c}=$

A. $(-2,-1)$　B. $(2,-1)$　C. $(-2,1)$　D. $(2,1)$

5. 已知 $a=\log_5 2$, $b=5^{0.3}$, $c=\log_6 2$,则

A. $c<a<b$　B. $a<c<b$　C. $c<b<a$　D. $a<b<c$

6. 根据调查统计,某市未来新能源汽车保有量基本满足模型 $y=\dfrac{N}{1+\left(\dfrac{N}{y_0}-1\right)e^{-px}}$,其中 y(单位:万辆)为第 x 年底新能源汽车的保有量, p 为年增长率, N 为饱和度, y_0 为初始值.若该市2023年底的新能源汽车保有量是20万辆,以此为初始值,以后每年的增长率为12%,饱和度为1300万辆,那么2033年底该市新能源汽车的保有量约为(结果四舍五入保留整数,参考数据: $\ln 0.887\approx-0.12$, $\ln 0.30\approx-1.2$)

A. 65万辆　B. 64万辆　C. 63万辆　D. 62万辆

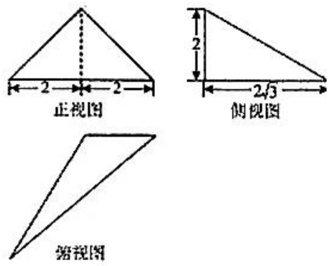
7. 已知点 P 是直线 $x+y+3=0$ 上一动点,过点 P 作圆 $C:(x+1)^2+y^2=1$ 的一条切线,切点为 A,则线段 PA 长度的最小值为

A. $2\sqrt{3}$　B. $2\sqrt{2}$　C. $\sqrt{2}$　D. 1

8. 若 $\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，则 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=$

A. $-\frac{1}{5}$　　B. $\frac{1}{5}$　　C. $-\frac{3}{5}$　　D. $\frac{3}{5}$

9. 已知三棱锥的三视图如图所示，则该三棱锥中最长棱的长度为



A. 4　　B. $2\sqrt{5}$　　C. $2\sqrt{7}$　　D. $4\sqrt{2}$

10. 在数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1=2, a_2=1$，且满足 $a_{n+2}+a_n=a_{n+1}$，则数列 $\{a_n\}$ 的前 2024 项的和为

A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. 0

11. 设 F_1, F_2 是双曲线 C: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，O 是坐标原点，P 是渐近线 l:$y=-\frac{b}{a}x$ 上位于第二象限的点，若 $|OP|=a$，$\cos\angle F_2PO=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则双曲线 C 的离心率为

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. 3

12. 已知不等式 $axe^x+x>1-\ln x$ 有解，则实数 a 的取值范围为

A. $\left(-\frac{1}{e^2},+\infty\right)$　　B. $\left(-\frac{1}{e},+\infty\right)$　　C. $\left(-\infty,\frac{1}{e^2}\right)$　　D. $\left(-\infty,\frac{1}{e}\right)$

二、填空题：本大题共 4 个小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知复数 $z=\frac{1-i}{1+i}$，其中 i 为虚数单位，则 $|z|=$ ________.

14. 数列 $\{a_n\}$ 中，S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_1=1, a_3=7$，数列 $\{\log_2(a_n+1)\}$ 为等差数列，则 $S_5=$ ________.

15. 所有棱长均为 6 的三棱锥，其外接球和内切球球面上各有一个动点 M、N，则线段 MN 长度的最大值为 ________.

16. 已知 F 为抛物线 C: $x^2=-8y$ 的焦点，过直线 l:$y=4$ 上的动点 M 作抛物线的切线，切点分别是 P,Q，则直线 PQ 过定点 ________.

三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17－21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

(一) 必做题：共 60 分.

17. (12 分)

已知 a,b,c 分别为 ΔABC 三个内角 A,B,C 的对边，且 $2b\cos A=c\cos A+a\cos C$.

(1) 求角 A 的大小；

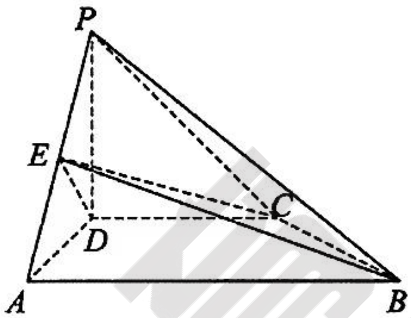
(2) 若 $a=\sqrt{7}, b+c=4$，求 bc 的值.

18.（12分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PD\perp$ 平面 $ABCD$，$AB\parallel DC$，$AB\perp AD$，$AB=2PD=2CD=2AD=4$，E 是 PA 的中点.

(1) 求证：$DE\perp$ 平面 PAB；

(2) 求三棱锥 $P-BCE$ 的体积.



19.（12分）

某企业积极响应政府号召，大力研发新产品，争创世界名牌. 为了对研发的一批最新产品进行合理定价，该企业将该产品按事先拟定的价格进行试销，得到一组销售数据 $(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,5)$，如表所示：

单价 x（千元）	4	5	6	7	8
销量 y（百件）	67	64	61	58	50

(1) 若变量 x，y 具有线性相关关系，求产品销量 y（百件）关于试销单价 x（千元）的线性回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$；

(2) 用 (1) 中所求的线性回归方程得到与 x_i 对应的产品销量的估计值 $\hat{y}_i$. 当销售数据 (x_i,y_i) 对应的残差的绝对值 $|\hat{y}_i-y_i|\leqslant 1$ 时，则将销售数据 (x_i,y_i) 称为一个“精准销售”. 现从 5 个销售数据中任取 2 个，求“精准销售”至少有 1 个的概率.

参考数据：$\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i=1760$，$\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2=190$

参考公式：线性回归方程中 $\hat{b}$，$\hat{a}$ 的估计值分别为 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\cdot\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$

20.（12分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的上下顶点分别为 B_1,B_2，左右顶点分别为 A_1,A_2，四边形 $A_1B_1A_2B_2$ 的面积为 $6\sqrt{5}$，若椭圆 C 上的点到右焦点距离的最大值和最小值之和为6.

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 过点 $(-1,0)$ 且斜率不为0的直线 l 与 C 交于 P,Q（异于 A_1,A_2）两点，设直线 A_2P 与直线 A_1Q 交于点 M，证明：点 M 在定直线上.

21.（12分）

已知函数 $f(x)=e^x+ax+b,a,b\in\mathbf{R}$.

(1) 若 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的单调递增函数，求 a 的取值范围；

(2) 当 $a=0$ 时，$f(x)+\sin x>0$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，求 b 的取值范围.

(二)选做题：共10分.请考生在第22、23题中选一题作答.如果多做，则按所做的第一题计分.

22. (10分) [选修4－4：坐标系与参数方程]

在平面直角坐标系中，点 P 是曲线 $C_1:\begin{cases}x=3+3\cos t\\ y=3\sin t\end{cases}$（$t$ 为参数）上的动点，以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，以极点 O 为中心，将线段 OP 逆时针旋转 90° 得到 OQ，设点 Q 的轨迹为曲线 C_2.

(1) 求曲线 C_1，C_2 的极坐标方程；

(2) 在极坐标系中，点 M 的坐标为 $\left(8,\frac{\pi}{2}\right)$，射线 $l:\theta=\frac{\pi}{3}(\rho>0)$ 与曲线 C_1、C_2 分别交于 A,B 两点，求 $\triangle MAB$ 的面积.

23. (10分) [选修4－5：不等式选讲]

已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)=|2x+1|+2|x-2|$.

(1) 若对任意 $x\in\mathbf{R}$，不等式 $f(x)\geqslant|m-1|+|m+2|$ 恒成立，求实数 m 的取值范围；

(2) 若 $f(x)$ 的最小值为 n，设 $a,b,c\in\mathbf{R}$，满足 $5a^2+3b^2+2c^2=2n$，求证：$|5a+3b+2c|\leqslant10$.