南充市高2024届高考适应性考试(二诊)

理科数学参考答案

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分，在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
选项	A	B	D	C	A	D	C	C	C	B	A	B

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分．把答案填在答题卡上.

13. $\underline{\ 3\ }$　　14. $\underline{\ 1\ }$　　15. $\underline{\dfrac{4\sqrt{5}}{9}}$　　16. ①②③

三、解答题：共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第17－21题必考题，每个试题考生必须作答．第22、23题为选考题，考试根据要求作答.

(一) 必考题

17. 解(1)：当 $n=1$ 时，$3S_1-a_1=64$，得 $a_1=32$. ……………… 1分

$\because 3S_n-a_n=64$

$\therefore$ 当 $n\geqslant 2$ 时，$3S_{n-1}-a_{n-1}=64$ ……………… 2分

$\therefore 2a_n+a_{n-1}=0, \dfrac{a_n}{a_{n-1}}=-\dfrac{1}{2}$.

所以数列 $\{a_n\}$ 以32为首项，$-\dfrac{1}{2}$ 为公比的等比数列. ……………… 4分

$a_n=32\cdot(-\dfrac{1}{2})^{n-1}$. ……………… 6分

(2)：$S_n=\dfrac{32\left[1-(-\frac{1}{2})^n\right]}{1-(-\frac{1}{2})}=\dfrac{64}{3}\left[1-(-\dfrac{1}{2})^n\right]$ ……………… 7分

$$=\begin{cases}\dfrac{64}{3}\left[1+(\dfrac{1}{2})^n\right], & n\text{为奇数}\\ \dfrac{64}{3}\left[1-(\dfrac{1}{2})^n\right], & n\text{为偶数}\end{cases}$$ ……………… 8分

又 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 是 R 上的减函数

所以当 $n=1$ 时，S_n 取得最大值为32,

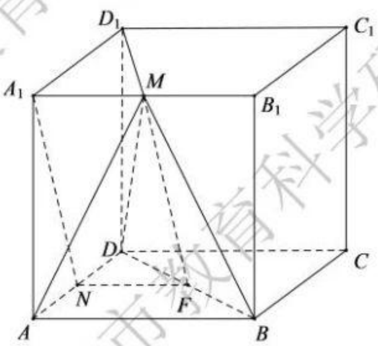
当 $n=2$ 时，T_n 取得最小值为16. ……………… 10分

$\because \forall n\in N_+, \lambda-1<S_n\leqslant 4\lambda+4$ 恒成立

$\therefore \begin{cases}\lambda-1<16\\ 32\leqslant 4\lambda+4\end{cases}$，解得：$7\leqslant\lambda<17$.

故 λ 取值范围为 $[7,17)$ ……………… 12分

18．解(1). 取 BD 中点 F，连接 NF，MF. ……………………………………………1分



$\because N$ 分别为 AD 的中点

$\therefore NF \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}AB$ ……………………………………………2分

又 $\because$ 四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为直四棱柱，且 M 为 A_1B_1 的中点

$\therefore A_1M \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}AB$

$\therefore NF \mathrel{\underline{\parallel}} A_1M$ ……………………………………………3分

$\therefore$ 四边形 A_1NFM 为平行四边形

$\therefore A_1N \parallel MF$ ………………………………………………………………4分

又 $\because MF \subset$ 平面 BDM，$A_1N \not\subset$ 平面 BDM

$\therefore A_1N \parallel$ 平面 BDM ……………………………………………6分

注：若取 AB 的中点 H，再证明平面 $A_1NH \parallel$ 平面 BDM 也可，酌情给分。

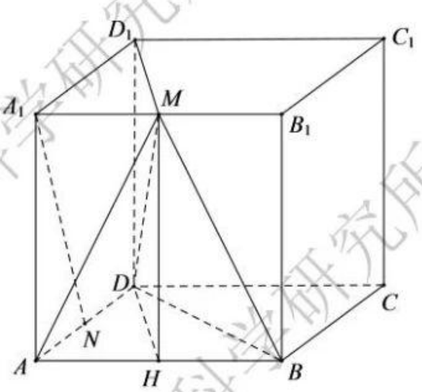
(2). 方法一(几何法)：

解：取 AB 中点 H，连接 DH，MH ……………………………………………7分

$\because$ 四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为直四棱柱

$\therefore MH \parallel D_1D$

$\therefore D,H,M,D_1$ 四点共面 ……………………………………8分



$\because$ 底面 $ABCD$ 是菱形，$\angle BAD=60^\circ$

$\therefore \triangle ABD$ 为等边三角形

$\therefore AH \perp DH$

又 $AH \perp MH$

$\therefore AH \perp$ 平面 DHM

故 AM 与平面 DD_1M 所成的角为 $\angle AMH$ ……………………………………………10分

又 $\because$ 在直角 $\triangle AMH$ 中，$AH=2$，$MH=AA_1=4$

$\therefore AM=2\sqrt{5}$

$\therefore \sin\angle AMH=\frac{AH}{AM}=\frac{2}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

即 AM 与平面 DD_1M 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ……………………………………12分

方法二(向量法)：

解：取 AB 中点 H，连接 DH

$\because$ 底面 $ABCD$ 是菱形，$\angle BAD=60^\circ$

$\therefore \triangle ABD$ 为等边三角形

$\therefore AH \perp DH$

又 $AH \parallel DC$

$\therefore DH \perp DC$

又 $\because$ 四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为直四棱柱

$\therefore DD_1 \perp$ 底面 $ABCD$

故 DH, DC, DD_1 两两垂直，建立如图所示空间直角坐标系 $D-xyz$.(如图 1)

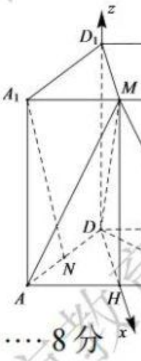


图 1

$\therefore D(0,0,0)$， $D_1(0,0,4)$， $M(2\sqrt{3},0,4)$， $A(2\sqrt{3}, -2, 0)$ ························8 分

$\therefore \overrightarrow{DD_1}=(0,0,4)$　　$\overrightarrow{D_1M}=(2\sqrt{3},0,0)$

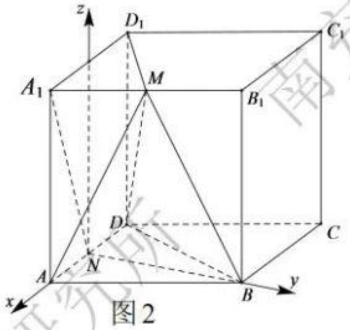


图 2

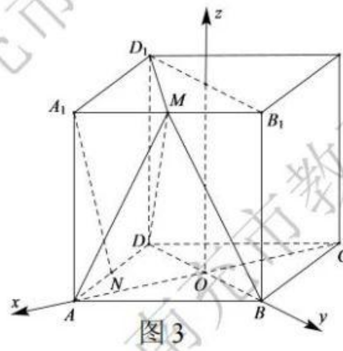


图 3

设 $\vec{n}=(x,y,z)$ 是平面 DD_1M 的法向量

$\therefore \begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{DD_1}=0 \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{D_1M}=0 \end{cases}$， 即 $\begin{cases} 4z=0 \\ 2\sqrt{3}x=0 \end{cases}$

令 $y=1$，则 $\vec{n}=(0,1,0)$ ···················· 10 分

又 $\overrightarrow{AM}=(0,2,4)$

设 AM 与平面 DD_1M 所成角为 θ

$$\therefore \sin\theta=\left|\cos\langle\vec{n},\overrightarrow{AM}\rangle\right|=\left|\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}}{|\vec{n}||\overrightarrow{AM}|}\right|=\frac{2}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

即 AM 与平面 DD_1M 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ································ 12 分

注：1. 上面的方法中直接证明 $\overrightarrow{D_1C_1}=(0,4,0)$ 是平面 DD_1M 的法向量亦可，酌情给分。

2. 若以图 2 的方法建立空间直角坐标系，此时 $\overrightarrow{AM}=(-1,\sqrt{3},4)$，平面 DD_1M 的法向量 $\vec{n}=(1,-\sqrt{3},0)$，酌情给分。

3. 若以图 3 的方法建立空间直角坐标系，此时 $\overrightarrow{AM}=(-\sqrt{3},1,4)$，平面 DD_1M 的法向量 $\vec{n}=(-\sqrt{3},1,0)$，酌情给分。

19. 解：(1). 临界值 $K=70$ 时，I级品中该指标小于或等于 70 的频率为 $\frac{3}{10}$

所以将 2 个不作该指标检测的I级品芯片直接应用于 A 型手机，每部手机损失 800 元的概率为 $\frac{3}{10}$

································ 1 分

故芯片生产商的损失 ξ 可能取值为 0，800，1600 ································ 2 分

$P(\xi=0)=C_2^0\times(\frac{3}{10})^0\times(\frac{7}{10})^2=\frac{49}{100}$；　　$P(\xi=800)=C_2^1\times(\frac{3}{10})^1\times(\frac{7}{10})^1=\frac{42}{100}$；

$P(\xi=1600)=C_2^2\times(\frac{3}{10})^2\times(\frac{7}{10})^0=\frac{9}{100}$； ································ 4 分

故 ξ 的分布列

ξ	0	800	1600
P	$\frac{49}{100}$	$\frac{42}{100}$	$\frac{9}{100}$

所以ξ的期望$E(\xi)=0\times\frac{49}{100}+800\times\frac{42}{100}+1600\times\frac{9}{100}=480$ ……………………………… 6分

(2). 当临界值$K=x$时，若采用方案一：

I级品中该指标小于或等于临界值K的概率为$0.002\times10+0.005\times(x-50)=0.005x-0.23$，

可以估计10000部A型手机中有$10000(0.005x-0.23)=50x-2300$部手机芯片应用错误；

……………………………… 7分

II级品中该指标大于临界值K的概率为$0.01\times10+0.03\times(60-x)=-0.03x+1.9$，

可以估计10000部B型手机中有$10000(-0.03x+1.9)=19000-300x$部手机芯片应用错误；

……………………………… 8分

故可以估计芯片生产商的损失费用$f(x)=0.08\times(50x-2300)+0.04\times(19000-300x)$

$=576-8x$ ……………………………… 10分

$\because x\in[50,55]$

$\therefore f(x)\in[136,176]$

又采用方案二需要检测费用共130万元

故从芯片生产商的成本考虑，应选择方案二 ……………………………… 12分

注：上面横线处若均无体现统计思想的词汇"估计、约"等，扣1分.

20. 解(1)：设点A,B,D的坐标分别为$(x_0,\frac{x_0^2}{4}),(x_1,\frac{x_1^2}{4}),(x_2,\frac{x_2^2}{4})$.

由$AC\,/\!/\,x$轴得：点C的坐标为$(-x_0,\frac{x_0^2}{4})$. ……………………………… 1分

由$x^2=4y$得，$y=\frac{1}{4}x^2$，$y'=\frac{x}{2}$.

所以抛物线在点A处的切线斜率为$k_l=\frac{x_0}{2}$.

又$k_{BD}=\dfrac{\frac{x_2^2}{4}-\frac{x_1^2}{4}}{x_2-x_1}=\frac{x_2+x_1}{4}$

由$BD\,/\!/\,l$得：$\frac{x_2+x_1}{4}=\frac{x_0}{2}$，

$\therefore x_2+x_1=2x_0$. ……………………………… 3分

$\because k'=\dfrac{\frac{x_2^2}{4}-\frac{x_0^2}{4}}{x_2+x_0}=\frac{x_2-x_0}{4}$，$k=\dfrac{\frac{x_1^2}{4}-\frac{x_0^2}{4}}{x_1+x_0}=\frac{x_1-x_0}{4}$

$\therefore k'+k=\frac{x_2-x_0}{4}+\frac{x_1-x_0}{4}=\frac{x_2+x_1-2x_0}{4}=0$ ……………………………… 5分

(2)根据题意：$k=2$　　$k'=-2$

$\therefore$直线CB的方程为$y-\frac{x_0^2}{4}=2(x+x_0)$，即$y=2x+2x_0+\frac{x_0^2}{4}$

由$\begin{cases}x^2=4y\\ y=2x+2x_0+\frac{x_0^2}{4}\end{cases}$，得：$x^2-8x-8x_0-x_0^2=0$

$\therefore x_1(-x_0)=-8x_0-x_0^2$　得 $x_1=x_0+8$　……………………………6 分

又直线 CD 得方程为 $y-\dfrac{x_0^2}{4}=-2(x+x_0)$，即 $y=-2x-2x_0+\dfrac{x_0^2}{4}$

由 $\begin{cases}x^2=4y\\ y=-2x-2x_0+\dfrac{x_0^2}{4}\end{cases}$，得：$x^2+8x+8x_0-x_0^2=0$

$\therefore x_2.(-x_0)=8x_0-x_0^2$　，得 $x_2=x_0-8$　……………………………7 分

$\therefore$ 直线 BD 的方程为 $y-\dfrac{(x_0+8)^2}{4}=\dfrac{x_0}{2}(x-x_0-8)$，即 $y=\dfrac{x_0}{2}x+16-\dfrac{x_0^2}{4}$

$\therefore P(x_0-\dfrac{32}{x_0},\dfrac{x_0^2}{4})$

由 $-x_0<x_P<x_0$ 知 $x_0>4$　……………………………8 分

方法一：

$\because |PA|=\left|x_0-(x_0-\dfrac{32}{x_0})\right|=\dfrac{32}{x_0}$，$|PC|=\left|(x_0-\dfrac{32}{x_0})-x_0\right|=2x_0-\dfrac{32}{x_0}$

$\therefore S_1=\dfrac{1}{2}(2x_0-\dfrac{32}{x_0})\cdot\left|\dfrac{(x_0+8)^2}{4}-\dfrac{(x_0-8)^2}{4}\right|=\dfrac{1}{2}(2x_0-\dfrac{32}{x_0})\cdot 8x_0=8(x_0^2-16)$

$S_2=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{32}{x_0}\times\left|\dfrac{x_0^2}{4}-\dfrac{(x_0-8)^2}{4}\right|=\dfrac{64(x_0-4)}{x_0}$　……………………………10 分

$\therefore \dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{1}{8}(x_0^2+4x_0)=\dfrac{1}{8}[(x_0+2)^2-4]$

又 $x_0>4$

$\therefore \dfrac{S_1}{S_2}>4$

$\therefore \dfrac{S_1}{S_2}$ 的取值范围为 $(4,+\infty)$　……………………………12 分

方法二：

$\because |PA|=\left|x_0-(x_0-\dfrac{32}{x_0})\right|=\dfrac{32}{x_0}$，

$\therefore S_2=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{32}{x_0}\cdot\left|\dfrac{x_0^2}{4}-\dfrac{(x_0-8)^2}{4}\right|=\dfrac{64(x_0-4)}{x_0}$　……………………………9 分

由 $k+k'=0$ 知 $\angle BCA=\angle ACD$

$\therefore \sin\angle BCD=\sin 2\angle BCA=\dfrac{2\sin\angle BCA\cos\angle BCA}{\sin^2\angle BCA+\cos^2\angle BCA}=\dfrac{2\tan\angle BCA}{\tan^2\angle BCA+1}=\dfrac{4}{5}$

又 $\because |BC|=\sqrt{1+2^2}\cdot|(x_0+8)-(-x_0)|=2\sqrt{5}(x_0+4)$

$|DC|=\sqrt{1+2^2}\cdot|(x_0-8)-(-x_0)|=2\sqrt{5}(x_0-4)$

$\therefore S_1=\dfrac{1}{2}|BC|\cdot|DC|\cdot\sin\angle BCD=8(x_0^2-16)$　……………………………10 分

$\therefore \dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{1}{8}(x_0^2+4x_0)=\dfrac{1}{8}[(x_0+2)^2-4]$

又 $x_0>4$

$\therefore \dfrac{S_1}{S_2}>4$

$\therefore \dfrac{S_1}{S_2}$ 的取值范围为 $(4, +\infty)$ ………………………… 12 分

方法三：先证明下面三角形的面积公式.

设 $\triangle MTS$ 中，$\overrightarrow{TM}=(a,b),\overrightarrow{TS}=(c,d)$.

则 $\triangle MTS$ 的面积为 $S=\dfrac{1}{2}|TM|\cdot|TS|sin\angle MTS=\dfrac{1}{2}|TM|\cdot|TS|sin\angle MTS$

$=\dfrac{1}{2}|TM|\cdot|TS|\sqrt{1-cos^2\angle MTS}=\dfrac{1}{2}|TM|\cdot|TS|\sqrt{1-\left(\dfrac{\overrightarrow{TM}\cdot\overrightarrow{TS}}{|\overrightarrow{TM}|\cdot|\overrightarrow{TS}|}\right)^2}$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{|TM|^2\cdot|TS|^2-(\overrightarrow{TM}\cdot\overrightarrow{TS})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2}$

$=\dfrac{1}{2}|ad-bc|$. ………………………… 9 分

$\because \overrightarrow{CB}=(2x_0+8, 4x_0+16)\quad \overrightarrow{CD}=(2x_0-8, -4x_0+16)$

$\therefore S_1=8(x_0^2-16)$

又 $\overrightarrow{PA}=(\dfrac{32}{x_0},0)\quad \overrightarrow{PD}=(\dfrac{32}{x_0}-8,16-4x_0)$

$\therefore S_2=\dfrac{64(x_0-4)}{x_0}$ ………………………… 10 分

$\therefore \dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{1}{8}(x_0^2+4x_0)=\dfrac{1}{8}[(x_0+2)^2-4]$

又 $x_0>4$

$\therefore \dfrac{S_1}{S_2}>4$

$\therefore \dfrac{S_1}{S_2}$ 的取值范围为 $(4, +\infty)$ ………………………… 12 分

注：方法三中，若不证明该面积公式，扣 1 分.

21. 解：(1) $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, -1)\cup(-1, +\infty)$ ………………………… 1 分

$f'(x)=\dfrac{(x^2-x+1)e^x}{(x+1)^2}>0$ ………………………… 2 分

$\therefore f(x)$ 的增区间为 $(-\infty, -1),(-1, +\infty)$ ………………………… 3 分

$\because f(x)$ 在 $(a-1,a+2)$ 上单调

$\therefore a+2\leqslant -1$ 或 $a-1\geqslant -1$

$\therefore a\leqslant -3$ 或 $a\geqslant 0$

故 a 的取值范围为 $(-\infty, -3]\cup[0, +\infty)$ ………………………… 5 分

(2) $g'(x)=\dfrac{2(x-2)e^x+2m(x+1)}{x^3}=\dfrac{2(x+1)}{x^3}(\dfrac{x-2}{x+1}e^x+m)$ ………………………… 6 分

由 (1) 知，$\varphi(x)=\dfrac{x-2}{x+1}e^x+m$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增

由 $0\leqslant m<\dfrac{e}{2}$ 知，$\varphi(1)=-\dfrac{e}{2}+m<0$

$\varphi(2)=m\geqslant 0$

$\therefore \exists\, x_m \in (1,2]$ 使 $\varphi(x_m)=0$ 且 $x\in[0,x_m)$ 时，$\varphi(x)<0$，$g'(x)<0$

$x\in(x_m,+\infty)$ 时，$\varphi(x)>0$，$g'(x)>0$

即 $g(x)$ 在 $[0,x_m)$ 单调递减，在 $(x_m,+\infty)$ 单调递增

$\therefore g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上存在最小值 A，且 $A=g(x_m)$ ………………………………8 分

由 $\varphi(x_m)=0$ 得：$\dfrac{x_m-2}{x_m+1}e^{x_m}+m=0$，即 $-m=\dfrac{x_m-2}{x_m+1}e^{x_m}$

$$\therefore A=g(x_m)=\frac{2e^{x_m}-2mx_m-m}{x_m^2}=\frac{2e^{x_m}-m(2x_m+1)}{x_m^2}$$

$$=\frac{2e^{x_m}+(2x_m+1)\cdot\dfrac{x_m-2}{x_m+1}e^{x_m}}{x_m^2}=\frac{(2x_m-1)e^{x_m}}{x_m(x_m+1)}$$ ……………10 分

设 $h(x)=\dfrac{(2x-1)e^x}{x(x+1)}\quad(1<x\leqslant 2)$

$$\therefore h'(x)=\frac{(2x+1)\left[(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\right]e^x}{(x^2+x)^2}>0$$

$\therefore h(x)$ 在 $(1,2]$ 上单调递增，$h(1)=\dfrac{e}{2}$，$h(2)=\dfrac{e^2}{2}$

$\therefore \dfrac{e}{2}<h(x)\leqslant\dfrac{e^2}{2}$

又 $x_m\in(1,2]$

故 $\dfrac{e}{2}<A\leqslant\dfrac{e^2}{2}$ ………………………………12 分

22. 解 (1). 由 $\rho=4\sin\theta$ 得：$\rho^2=4\rho\sin\theta$，

把 $\begin{cases}\rho^2=x^2+y^2\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$ 代入上式得 $x^2+y^2-4y=0$

所以曲线 C 的普通方程为 $x^2+y^2-4y=0$ ………………………………4 分

(2) $\because$ 点 $P(1,2)$ 在直线 l：$x+y=3$ 上.

$\therefore$ 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$ ……… ①. ………………………………6 分

将①代入曲线 C 的普通方程 $(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}t)^2+(2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t)^2-4(2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t)=0$.

整理得：$t^2-\sqrt{2}t-3=0$

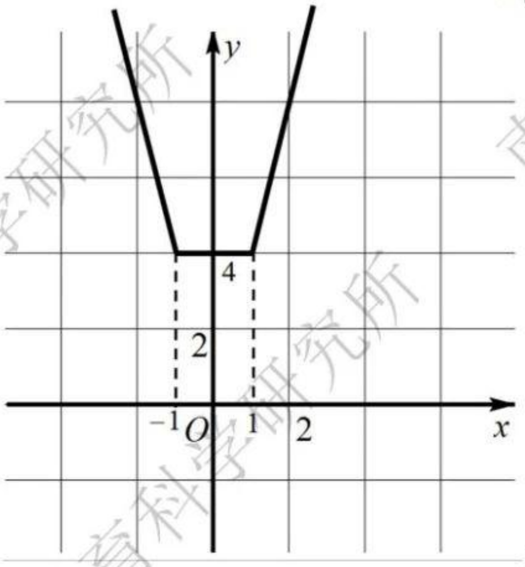
设方程的两根分别为 t_1,t_2

$\therefore \begin{cases}t_1+t_2=\sqrt{2}\\ t_1\cdot t_2=-3<0\end{cases}$. ………………………………8 分

$\therefore |\overrightarrow{PA}|=|t_1|$，$|\overrightarrow{PB}|=|t_2|$，$\langle\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB}\rangle=180^\circ$，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=t_1t_2$

$\therefore \overrightarrow{PA}^2+\overrightarrow{PB}^2+\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=t_1^2+t_2^2+t_1\cdot t_2=(t_1+t_2)^2-t_1\cdot t_2=5$. ……………………10 分

23. 解 (1):. 当 $a=-2$ 时，$f(x)=|2x-2|+|2x-a|=\begin{cases}-4x, x\leqslant -1\\ 4, -1<x\leqslant 1\\ 4x, x>-1\end{cases}$ ……………… 2 分



……………… 4 分

由上图可知，函数 $f(x)$ 的值域为 $[4,+\infty)$ ……………… 5 分

(2): $f(x)=|2x-2|+|2x-a|\geqslant|2x-2-(2x-a)|=|-2+a|=|a-2|$.

当且仅当 $(2x-2)(2x-a)\leqslant 0$ 时，等号成立

$\therefore f(x)$ 的最小值为 $|a-2|$ ……………… 7 分

$\because$ 关于 x 的不等式 $f(x)+2a\leqslant a^2$ 有解.

$\therefore |a-2|+2a\leqslant a^2$ ……………… 8 分

$\therefore \begin{cases}a\geqslant 2\\ a-2+2a\leqslant a^2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a<2\\ 2-a+2a\leqslant a^2\end{cases}$.

解得: $a\geqslant 2$ 或 $a\leqslant -1$.

所以 a 的取值范围为 $(-\infty,-1]\cup[2,+\infty)$ ……………… 10 分