成都市 2021 级高中毕业班第二次诊断性检测

数学(理科)参考答案及评分意见

第Ⅰ卷 （选择题，共 60 分）

一、选择题：(每小题 5 分，共 60 分)

1. B； 2. C； 3. B； 4. C； 5. A； 6. B； 7. D； 8. C； 9. D； 10. D； 11. A； 12. D.

第Ⅱ卷 （非选择题，共 90 分）

二、填空题：(每小题 5 分，共 20 分)

13. 三棱柱，三棱锥，圆锥等(其他正确答案同样给分)； 14. $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$；

15. 4； 16. ②③④.

三、解答题：(共 70 分)

17. 解：(Ⅰ)当 $n=1$ 时，$a_1=S_1(2)=0$. ……1 分

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n(2)-S_{n-1}(2)=(2+2^2+\cdots 2^n-2)-(2+2^2+\cdots 2^{n-1}-2)=2^n$.

……5 分

又当 $n=1$ 时，$a_1=0$ 不满足上式，

所以 $a_n=\begin{cases}0, & n=1,\\ 2^n, & n\geqslant 2.\end{cases}$ ……6 分

(Ⅱ)$\because S_{2024}(x)=x+x^2+x^3+\cdots+x^{2024}-2$,

$\therefore S'_{2024}(x)=1+2x+3x^2+\cdots+2024x^{2023}$. ……7 分

$S'_{2024}(2)=1+2\times 2+3\times 2^2+\cdots+2024\times 2^{2023}$ ……①,

$2S'_{2024}(2)=2+2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+2024\times 2^{2024}$ ……②,

①－②得，$-S'_{2024}(2)=1+1\times 2+1\times 2^2+\cdots+1\times 2^{2023}-2024\times 2^{2024}$ ……10 分

$=\dfrac{1-2^{2024}}{1-2}-2024\times 2^{2024}=-2023\times 2^{2024}-1$. ……11 分

$\therefore S'_{2024}(2)=2023\times 2^{2024}+1$. ……12 分

18. 解：(Ⅰ)已知本次模拟考试成绩都近似服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，

由题意可得 $\mu=65$. ……1 分

$\because \dfrac{228}{10000}=0.0228$，又 $\dfrac{1-P(\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant \mu+2\sigma)}{2}=0.0228$. ……3 分

即 $P(X>\mu+2\sigma)=0.0228$. $\therefore \mu+2\sigma=87$，解得 $\sigma=11$. ……4 分

$\because$甲市学生 A 在该次考试中成绩为 76 分，且 $76=\mu+\sigma$，

又 $\dfrac{1-P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant \mu+\sigma)}{2}=0.1587$，即 $P(X>\mu+\sigma)=0.1587$. ……5 分

$\therefore$学生 A 在甲市本次考试的大致名次为 1587 名. ……6 分

(Ⅱ)在本次考试中，抽取 1 名化学成绩在 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 之内的概率为 0.9974.

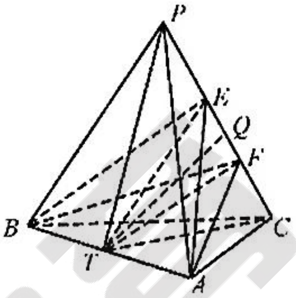
$\therefore$抽取 1 名化学成绩在 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 之外的概率为 0.0026. ……7 分

∴随机变量 X 服从二项分布，即 $X \sim B(40, 0.0026)$． ……9 分

∴ $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.9974^{40} \approx 0.0989$． ……10 分

X 的数学期望为 $EX = np = 40 \times 0.0026 = 0.104$． ……12 分

19. 解：（Ⅰ）取 AB 的中点为 T，连接 PT, CT．



∵四面体 $P-ABC$ 为正四面体，

∴△ ABP 为正三角形． ……1 分

又 T 为 AB 的中点，

∴ $PT \perp AB$．同理可得 $CT \perp AB$． ……3 分

∵ $PT \cap CT = T$，$PT, CT \subset$ 平面 PTC，

∴ $AB \perp$ 平面 PTC． ……5 分

又 $PC \subset$ 平面 PTC，∴ $AB \perp PC$． ……6 分

（Ⅱ）取 PC 的中点为 Q，连接 ET, FT, QT，设 $PA = 6a$．

由（Ⅰ）得 $AB \perp$ 平面 PTC．

∵ $ET, FT \subset$ 平面 PTC，∴ $AB \perp ET$，$AB \perp FT$．

∴ $\angle PTE$ 为二面角 $P-AB-E$ 的平面角，$\angle ETF$ 为二面角 $E-AB-F$ 的平面角，$\angle FTC$ 为二面角 $F-AB-C$ 的平面角． ……7 分

由图形对称性可判断 $\angle PTE = \angle FTC$． ……8 分

易得 $PT = CT = 3\sqrt{3}a$，∴ $TQ \perp PC$．

在△ TPQ 中，$TQ = \sqrt{PT^2 - PQ^2} = 3\sqrt{2}a$．

在△ ETQ 中，$ET = \sqrt{EQ^2 + TQ^2} = \sqrt{19}a$．同理可得 $FT = \sqrt{19}a$．

∴ $\cos\angle PTE = \dfrac{PT^2 + ET^2 - PE^2}{2PT \cdot ET} = \dfrac{7\sqrt{57}}{57}$，$\cos\angle ETF = \dfrac{ET^2 + FT^2 - EF^2}{2ET \cdot FT} = \dfrac{17}{19}$．

……11 分

∵ $\cos\angle PTE > \cos\angle ETF$，∴ $\angle PTE < \angle ETF$．

∴二面角 $E-AB-F$ 的平面角最大，其余弦值等于 $\dfrac{17}{19}$． ……12 分

20. 解：（Ⅰ）设 $M(x_1, y_1)$，$S(x_1, -y_1)$．

∵ $k_{AM} = \dfrac{y_1}{x_1 + a}$，$k_{BS} = \dfrac{-y_1}{x_1 - a}$， ……1 分

∴ $k_{AM} \cdot k_{BS} = \dfrac{y_1}{x_1 + a} \cdot \dfrac{-y_1}{x_1 - a} = \dfrac{-y_1^2}{x_1^2 - a^2}$． ……2 分

∵ $M(x_1, y_1)$ 在双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{5} = 1 (a > 0)$ 上，

∴ $k_{AM} \cdot k_{BS} = \dfrac{-y_1^2}{x_1^2 - a^2} = \dfrac{-5(\frac{x_1^2}{a^2} - 1)}{x_1^2 - a^2} = -\dfrac{5}{a^2} = -\dfrac{5}{4}$．解得 $a = 2$． ……4 分

∴双曲线 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{5} = 1$． ……5 分

（Ⅱ）设 $N(x_2, y_2)$，直线 MN：$x = my + 3$．

由 $\begin{cases}x=my+3,\\ \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1\end{cases}$ 消去 x，得 $(5m^2-4)y^2+30my+25=0$.

$m\neq\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\Delta=400(m^2+1)>0$.

$\therefore y_1+y_2=\dfrac{-30m}{5m^2-4}$，$y_1y_2=\dfrac{25}{5m^2-4}$. ……6 分

直线 BM：$y=\dfrac{y_1}{x_1-2}(x-2)$，

令 $x=1$，解得 $y_P=\dfrac{-y_1}{x_1-2}$. 同理可得 $y_Q=\dfrac{-y_2}{x_2-2}$. ……7 分

$\because$ 以 PQ 为直径的圆的方程为 $(x-1)(x-1)+(y+\dfrac{y_1}{x_1-2})(y+\dfrac{y_2}{x_2-2})=0$，

……8 分

由对称性可得，若存在定点，则定点一定在 x 轴上.

令 $y=0$，得 $(x-1)^2+\dfrac{y_1}{x_1-2}\cdot\dfrac{y_2}{x_2-2}=0$.

$$\therefore (x-1)^2+\frac{y_1y_2}{(x_1-2)(x_2-2)}=(x-1)^2+\frac{y_1y_2}{(my_1+1)(my_2+1)}$$

$$=(x-1)^2+\frac{\frac{25}{5m^2-4}}{m^2\cdot\frac{25}{5m^2-4}+m\cdot\frac{-30m}{5m^2-4}+1}$$

$$=(x-1)^2+\frac{25}{25m^2-30m^2+5m^2-4}$$

$$=(x-1)^2-\frac{25}{4}=0.$$ ……10 分

$\therefore (x-1)^2=\dfrac{25}{4}$，解得 $x=-\dfrac{3}{2}$ 或 $x=\dfrac{7}{2}$.

$\therefore$ 以 PQ 为直径的圆恒过点 $(-\dfrac{3}{2},0)$，$(\dfrac{7}{2},0)$. ……12 分

21. 解：(Ⅰ) 当 $a=\dfrac{1}{8}$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{4}e^x-\sqrt{x}$，$f(0)=\dfrac{1}{4}\neq 0$.

$\because f'(x)=\dfrac{1}{4}e^x-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$，$f''(x)=\dfrac{1}{4}e^x+\dfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$， ……1 分

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f''(x)>0$，

$\therefore$ 函数 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. ……2 分

由 $f'(\dfrac{1}{4})=\dfrac{1}{4}e^{\frac{1}{4}}-1<0$，$f'(1)=\dfrac{1}{4}e-\dfrac{1}{2}>0$，

$\therefore \exists x_0\in(\dfrac{1}{4},1)$，使得 $f'(x_0)=0$. ……3 分

$\therefore$ 当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

又 $f(\frac{1}{100})=\frac{1}{4}e^{\frac{1}{100}}-\frac{1}{10}>0$，$f(1)=\frac{1}{4}e-1<0$，$f(4)=\frac{1}{4}e^4-2>0$，

$\therefore f(x)$ 有两个零点. ……5 分

（Ⅱ）$\because$ 存在 $b\in(0,+\infty)$，使得当 $x\in(b,b+2024)$ 时，$f(x)>e^x-a\ln(x+1)+2a-1$，

即存在 $b\in(0,+\infty)$，使得当 $x\in(b,b+2024)$ 时，$(2a-1)(e^x-1)+a\ln(x+1)-\sqrt{x}>0$.

设 $g(x)=(2a-1)(e^x-1)+a\ln(x+1)-\sqrt{x}$.

(i)当 $a>\frac{1}{2}$ 时，设 $h(x)=e^x-x-1$.

$\therefore h'(x)=e^x-1$.

$\because h'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，又 $h'(0)=0$，

$\therefore h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. 又 $h(0)=0$，

$\therefore h(x)>0$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立. ……6 分

$\therefore g(x)=(2a-1)(e^x-1)+a\ln(x+1)-\sqrt{x}>(2a-1)x-\sqrt{x}$.

$\therefore$当 $x\geqslant\frac{1}{(2a-1)^2}$ 时，$g(x)>0$.

取 $b=\frac{1}{(2a-1)^2}$，当 $x\in(b,b+2024)$ 时，$g(x)>0$ 恒成立.

$\therefore$当 $a>\frac{1}{2}$ 时满足题意. ……8 分

(ii)当 $a\leqslant\frac{1}{2}$ 时，设 $w(x)=2e^x+\ln(x+1)-2$.

$\therefore w'(x)=2e^x+\frac{1}{x+1}$.

$\because w'(x)>0$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立，$\therefore w(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

又 $w(0)=0$，$\therefore w(x)>0$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立. ……9 分

$\therefore g(x)=a[2e^x+\ln(x+1)-2]-e^x-\sqrt{x}+1\leqslant e^x+\frac{1}{2}\ln(x+1)-1-e^x-\sqrt{x}+1$

$=\frac{1}{2}\ln(x+1)-\sqrt{x}$. ……10 分

设 $n(x)=\frac{1}{2}\ln(x+1)-\sqrt{x}$.

$\therefore n'(x)=\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}-(x+1)}{2(x+1)\sqrt{x}}=\frac{-(\sqrt{x}-\frac{1}{2})^2-\frac{3}{4}}{2(x+1)\sqrt{x}}$.

$\because n'(x)<0$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立，$\therefore n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

又 $n(0)=0$，$\therefore n(x)<0$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立.

故 $g(x)\leqslant0$ 恒成立，不合题意.

综上，a 的取值范围为 $(\frac{1}{2},+\infty)$. ……12 分

22. 解：（Ⅰ）由曲线 C 的参数方程可得 $(x-2)^2+y^2=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha$， ……1 分

化简得曲线 C 的普通方程为 $(x-2)^2+y^2=1$. ……3 分

（Ⅱ）曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2-4\rho\cos\theta+3=0$. ……5 分

设 $A(\rho_1,\theta_1)$，$B(\rho_1,\theta_1+\frac{\pi}{2})$，$M(\rho,\theta)$. ……6 分

$\because \rho=\frac{\sqrt{2}}{2}\rho_1,\theta=\theta_1+\frac{\pi}{4}$，

$\therefore \rho_1=\sqrt{2}\rho,\theta_1=\theta-\frac{\pi}{4}$. ……8 分

$\therefore (\sqrt{2}\rho)^2-4\times\sqrt{2}\rho\cos(\theta-\frac{\pi}{4})+3=0$.

$\therefore M$ 的轨迹的极坐标方程为 $\rho^2-2\sqrt{2}\rho\cos(\theta-\frac{\pi}{4})+\frac{3}{2}=0$. ……10 分

23. 解：（Ⅰ）$\because |x+a|+b<4$，易知 $4-b>0$，

$\therefore b-a-4<x<4-a-b$. ……3 分

$\because f(x)<4$ 的解集为 $\{x|0<x<6\}$，

$\therefore \begin{cases} b-a-4=0, \\ 4-a-b=6 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=-3, \\ b=1. \end{cases}$ ……5 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 $f(x)=|x-3|+1$，

$\therefore f(x)$ 的最小值为 1，即 $m+2n+3p=1$. ……6 分

$\therefore \frac{1}{m+2p}+\frac{1}{2n+p}=(\frac{1}{m+2p}+\frac{1}{2n+p})(m+2p+2n+p)=1+1+\frac{2n+p}{m+2p}+\frac{m+2p}{2n+p}\geqslant 4$. ……9 分

当且仅当 $m+2p=2n+p=\frac{1}{2}$ 时，等号成立.

$\therefore \frac{1}{m+2p}+\frac{1}{2n+p}$ 的最小值为 4. ……10 分