泸州市高 2021 级第二次教学质量诊断性考试

数　学（理科）参考答案及评分意见

评分说明：

1．本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分参考制订相应的评分细则．

2．对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度．可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分．

3．解答右侧所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数．

4．只给整数分数，选择题和填空题不给中间分．

一、选择题：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	A	C	D	C	C	B	D	D	B	D	D

二、填空题：

13． 60；　　14． $\frac{13}{2}$；　　15． $[0,+?)$；　　16． $\frac{p}{6}$．

三、解答题：

17．解：（I）当 $n=1$ 时，$S_1=\frac{3}{2}(a_1-1)=a_1$，……1 分

所以 $a_1=3$，……2 分

当 $n\geqslant 2$ 时，$S_n=\frac{3}{2}(a_n-1)$，$S_{n-1}=\frac{3}{2}(a_{n-1}-1)$，……3 分

所以 $S_n-S_{n-1}=\frac{3}{2}(a_n-1)-\frac{3}{2}(a_{n-1}-1)$，……4 分

整理得 $a_n=3a_{n-1}$，……5 分

数列 $\{a_n\}$ 是以 3 为首项，公比为 3 的等比数列，

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=3^n$；……6 分

（II）因为 $a_n=3^n$，$a_{n+1}=3^{n+1}$，由题意得：

$b_n=\frac{a_{n+1}-a_n}{n+1}=\frac{2\times 3^n}{n+1}$，……7 分

所以 $c_n=\dfrac{2}{n+1}$， ……………………………………………………………………8 分

$c_nc_{n+1}=\dfrac{4}{(n+1)(n+2)}=4(\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2})$， ……………………………………………9 分

所以 $T_n=4[(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3})+(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4})+\cdots+(\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2})]$ ……………………………… 10 分

$=4(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+2})$ ……………………………………………………………………………11 分

$=\dfrac{2n}{n+2}$． ……………………………………………………………………………… 12 分

18．解：（I）因为 $AB=AD$， AC 为底面圆的直径，

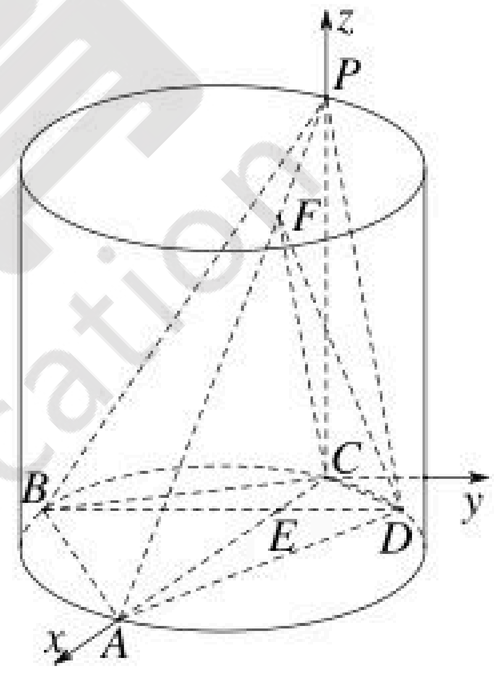
所以 $AC\perp BD$， ……………………………………………1 分

因为 PC 为圆柱的母线，

所以 $BD\perp PC$， 且 $PC\cap PA=P$， ……………………………3 分

所以 $BD\perp$ 平面 PAC， 又 $PA\subset$ 平面 PAC， ……………4 分

所以 $AP\perp BD$； ……………………………………………5 分



（II）解法一：在 Rt△ABC 中，因为 $AC=4$， $BC=2$，

所以 $AB=2\sqrt{3}$， $\angle BAC=30^\circ$， 设 AC 与 BD 相交于 E，

在 Rt△ADE 中， $DE=\sqrt{3}$， ……………………………………………………………6 分

以 C 为坐标原点， $\overrightarrow{CA}$ 方向为 x 轴正方向， $\overrightarrow{ED}$ 方向为 y 轴正方向， $\overrightarrow{CP}$ 方向为 z 轴正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $C-xyz$， ……………………………………7 分

则 $C(0,0,0)$， $A(4,0,0)$， $D(1,\sqrt{3},0)$， $P(0,0,4)$，

因为 $\dfrac{PF}{FA}=\dfrac{1}{3}$， 所以 $\overrightarrow{PF}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{PA}=(1,0,-1)$，

则 $\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{PF}=(0,0,4)+(1,0,-1)=(1,0,3)$， ……………………………………8 分

设平面 FCD 的法向量 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$， 则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CF}=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CD}=0\end{cases}$， 即 $\begin{cases}x+3z=0\\ x+\sqrt{3}y=0\end{cases}$，

令 $x=-3$， 则 $y=\sqrt{3}$， $z=1$， 故 $\boldsymbol{m}=(-3,\sqrt{3},1)$， ……………………………………9 分

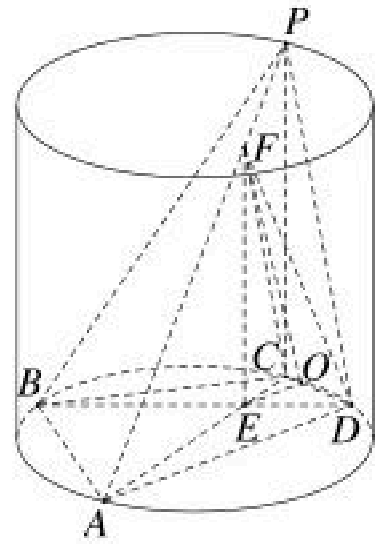
不妨取平面 PCD 的法向量 $\boldsymbol{n}=\overrightarrow{DA}=(3,-\sqrt{3},0)$， …………………………………… 10 分

设二面角 $F-CD-P$ 的平面角为 θ， 易知 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，

所以 $\cos\theta=\dfrac{|9+3|}{\sqrt{9+3+1}\cdot\sqrt{9+3}}=\dfrac{2\sqrt{39}}{13}$，

所以二面角 $F\text{-}CD\text{-}P$ 的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{39}}{13}$． …………………………………… 12 分

解法二：（Ⅱ）在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，因为 $AC=4$， $BC=2$，



所以 $AB=2\sqrt{3}$， $\angle BAC=30^{\circ}$， ………………………6 分

设 AC 与 BD 相交于 E，

所以在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 中， $AE=3$，

所以 $\dfrac{CE}{EA}=\dfrac{1}{3}$， 又因为 $\dfrac{PF}{FA}=\dfrac{1}{3}$， ………………………7 分

连接 EF， 可得： $PC \parallel EF$， …………………………………………………………… 8 分

所以 $EF\perp$ 平面 ECD， 过点 E 作 $EO\perp CD$ 于点 O， 连接 FO，

则 $FO\perp CD$， 即 $\angle EOF$ 是二面角 $E\text{-}CD\text{-}F$ 的平面角， ………………………………9 分

在 $\mathrm{Rt}\triangle OED$ 中， $CE=1$， $DE=\sqrt{3}$， 所以 $OE=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$， $OF=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$， ……… 10 分

在 $\mathrm{Rt}\triangle EOF$ 中， $\sin\angle EOF=\dfrac{EF}{OF}=\dfrac{3}{\frac{\sqrt{39}}{2}}=\dfrac{2\sqrt{39}}{13}$， ……………………………… 11 分

因为二面角 $F\text{-}CD\text{-}P$ 与二面角 $E\text{-}CD\text{-}F$ 的平面角互余，

所以二面角 $F\text{-}CD\text{-}P$ 的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{39}}{13}$． …………………………………… 12 分

19．解：（Ⅰ） $\dfrac{25^2}{25}=25$， …………………………………………………………………… 1 分

所以 $Y\sim N(500,5^2)$， ………………………………………………………………… 2 分

因为 $P(\mu-2\sigma\leqslant\eta\leqslant\mu+2\sigma)=0.9545$， ………………………………………… 3 分

所以 $P(\eta\leqslant\mu-2\sigma)=\dfrac{1-0.9545}{2}=0.02275$， …………………………………… 5 分

因为 $490=500-2\times5$， ………………………………………………………………… 7 分

所以 $P(Y\leqslant490)=P(Y\leqslant\mu-2\sigma)=0.02275$； …………………………………… 9 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）可得， $P(Y\leqslant490)=0.02275$，

希尔伯特计算 25 份披萨质量的平均值为 488.72g， $488.72<490$， …………… 10 分

而 $0.02275<0.05$ 为小概率事件，小概率事件基本不会发生，所以希尔伯特认为老板的说法不真实，这就是他举报该老板的理由． ……………………………………… 12 分

20．解：（Ⅰ）令 $x=0$，则 $f(0)=2$， ………………………………………………………… 1 分

因为 $f'(x)=6x^2-2ax$， ………………………………………………………………… 2 分

$|PF|=2p+\frac{p}{2}=5$，所以 $p=2$，…………………… 3 分

H的方程为 $y^2=4x$；……………………………………………………………… 4 分

（II）点 F 的坐标为$(1,0)$，设直线 l 的方程为：$x=my+1$，代入 H 方程消去 x 整理得：

$y^2-4my-4=0$，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4$，………………………………… 5 分

直线 AO 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1}x$，

H的准线方程为：$x=-1$，所以点 C 的坐标为$(-1,-\frac{y_1}{x_1})$，……………………… 6 分

因为 $y_1^2=4x_1$，所以 $-\frac{y_1}{x_1}=-\frac{4}{y_1}=y_2$，即点 $C(-1,y_2)$，………………………… 7 分

所以直线 BC 平行于 x 轴，

直线 CF 的斜率为 $k_{CF}=-\frac{y_2}{2}$，所以直线 AD 的斜率为 $\frac{2}{y_2}$，

其方程为 $y-y_1=\frac{2}{y_2}(x-x_1)$，………………………………………………………… 8 分

因为点 G 的纵坐标为 y_2，

所以点 G 的横坐标为 $x_G=x_1+\frac{1}{2}y_2^2+2=x_1+2x_2+2$，……………………………… 9 分

所以 $\frac{|GB|}{|GC|}=\frac{x_1+2x_2+2-x_2}{x_1+2x_2+2+1}=\frac{x_1+x_2+2}{x_1+2x_2+3}=\frac{x_1^2+2x_1+1}{x_1^2+3x_1+2}$

$=\frac{x_1+1}{x_1+2}=1-\frac{1}{x_1+2}$，………………………………………………………… 10 分

因为 $x_1>0$，所以 $\frac{1}{2}<1-\frac{1}{x_1+2}<1$，

即 $\frac{|GB|}{|GC|}$ 的取值范围是 $(\frac{1}{2},1)$．………………………………………………… 12 分

22. 解：(Ⅰ)将 $\rho^2=x^2+y^2$，$\rho\cos\theta=x$，$\rho\sin\theta=y$ 代入 C 的极坐标方程 $\rho^2-2\rho\cos\theta-2\rho\sin\theta-2=0$ 中，……2 分

得曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-2x-2y-2=0$，……4 分

即 $(x-1)^2+(y-1)^2=4$；……5 分

（Ⅱ）点 $P(2,2)$ 在直线 l 上，将直线 l 的参数方程 $\begin{cases}x=2+t\cos\alpha\\y=2+t\sin\alpha\end{cases}$（$t$ 为参数）代入曲线 C 的方程，

整理得 $t^2+2(\cos\alpha+\sin\alpha)t-2=0$，……6 分

满足 $\Delta=4(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+4>0$，

设点 A，B 对应的参数分别为 t_1，t_2，则

$t_1+t_2=-2(\cos\alpha+\sin\alpha)$，$t_1+t_2=-2<0$，……7 分

由参数 t 的几何意义，不妨令 $|t_1|=|PA|$，$|t_2|=|PB|$，

所以 $|PA|+|PB|=|t_1|+|t_2|=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\sqrt{4\sin 2\alpha+12}$，……8 分

当 $|PA|+|PB|=2\sqrt{2}$ 时，

$\sin 2\alpha=-1$，所以 $\alpha=k\pi-\dfrac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$，……9 分

所以直线 l 的倾斜角为 $\dfrac{3\pi}{4}$．……10 分

23．解：（Ⅰ）当 $a=2$ 时，$f(x)=|x+2|-2|x-1|=\begin{cases}x-4,x\leqslant-2\\3x,-2<x<1\\-x+4,x\geqslant1\end{cases}$，……1 分

不等式 $f(x)\leqslant0$ 等价于 $\begin{cases}x\leqslant-2\\x-4\leqslant0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-2<x<1\\3x\leqslant0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x\geqslant1\\-x+4\leqslant0\end{cases}$，……4 分

解得 $x\leqslant0$ 或 $x\geqslant4$，不等式的解集为 $(-\infty,0]\cup[4,+\infty)$；……5 分

（Ⅱ）当 $a=-1$ 时，$f(x)=|x+2|+|x-1|\geqslant|x+2-(x-1)|=3$，……6 分

所以 $a^2+b^2+4c^2=3$，

由柯西不等式知：$(1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+4c^2)\geqslant(a+b+2c)^2$，……7 分

又 a，b，c 均为正数，即 $(a+b+2c)^2\leqslant3\times3$，……8 分

当且仅当 $a=b=2c=1$ 时，等号成立，此时 $a=b=1$，$c=\dfrac{1}{2}$，……9 分

所以 $a+b+2c$ 的最大值为 3．……10 分