

成都石室中学 2023-2024 年度下期高 2024 届二诊模拟考试

数学试题（文）（A 卷）

（总分：150 分，时间：120 分钟）

第 I 卷（共 60 分）

一、选择题（本题共 12 道小题，每小题 5 分，共 60 分）

1. 已知复数 $z = \frac{1}{1+i}$ （其中 i 为虚数单位），则 z 的虚部是

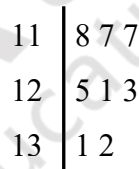
- A. $-\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}i$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}i$

2. 若集合 $A = \{1, 2\}$, $B = \left\{y \mid y = x^2\right\}$, 则 $a \in A$ 是 $a \in B$ 的

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

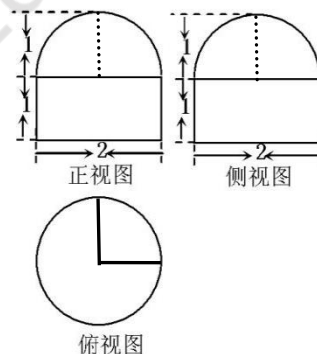
3. 如图是根据某校高三 8 位同学的数学月考成绩（单位：分）画出的茎叶图，其中左边的数字从左到右分别表示学生数学月考成绩的百位数字和十位数字，右边的数字表示学生数学月考成绩的个位数字，则下列结论正确的是

- A. 这 8 位同学数学月考成绩的极差是 14
 B. 这 8 位同学数学月考成绩的中位数是 122
 C. 这 8 位同学数学月考成绩的众数是 118
 D. 这 8 位同学数学月考成绩的平均数是 124



4. 已知一个空间几何体的三视图如图所示，其中正视图、侧视图都是由半圆和矩形组成，则这个几何体的体积是

- A. $\frac{3}{2}\pi$ B. $\frac{5}{3}\pi$ C. $\frac{7}{3}\pi$ D. $\frac{9}{2}\pi$

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，且 $a_2 + a_3 + a_6 + a_9 + a_{10} = 10$ ，则 $a_4 + a_8$ 的值为

- A. 2 B. 4 C. 6 D. 8

6. 若 a, b 是正实数，且 $\frac{1}{3a+b} + \frac{1}{2a+4b} = 1$ ，则 $a+b$ 的最小值为

- A. $\frac{4}{5}$ B. $\frac{2}{3}$ C. 1 D. 2

7. 当 $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ 时，关于 x 的不等式 $(2a \sin x + \cos 2x - 3)(\sin x - x) \leq 0$ 有解，则 a 的最小值是

- A. 2 B. 3 C. 4 D. $4\sqrt{2}$

8. 已知函数 $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ ，则下列结论中不正确的是A. π 为函数 $|f(x)|$ 的一个周期B. 点 $\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的一个对称中心点

C. 在区间 $[-a, a]$ 上单调递增，则实数 a 的最大值为 $\frac{5\pi}{12}$

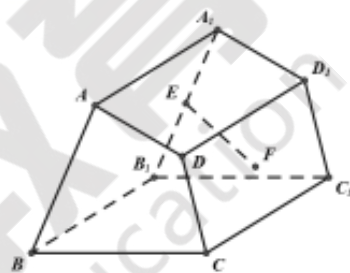
D. 将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个长度单位后，得到一个偶函数的图象

9. 已知抛物线 $y^2 = 4x$ ，弦 AB 过其焦点，分别过弦的端点 A, B 的两条切线交于点 C ，点 C 到直线 AB 距离的最小值是

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. 2

10. 如图，四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， E 为棱 A_1B_1 的中点， F 为四边形 DCC_1D_1 对角线的交点，下列说法：

- ① $EF \parallel$ 平面 BCC_1B_1 ；
 ② 若 $EF \parallel$ 平面 ADD_1A_1 ，则 $BC \parallel AD$ ；
 ③ 若四边形 $ABCD$ 矩形，且 $EF \perp D_1C_1$ ，则四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 为直四棱柱。



其中正确说法的个数是

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

11. 已知函数 $f(x) = 2^x + 2^{-x} + \cos x + x^2$ ，若 $a = f(\sqrt{2})$, $b = f(-e^e)$, $c = f(\pi^{\frac{1}{\pi}})$ ，则

- A. $c < b < a$ B. $a < c < b$ C. $c < a < b$ D. $b < c < a$

12. 若双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，过右焦点 F_2 的直线 l 与双曲线 C 交于 A, B 两点，

已知 l 的斜率为 k ， $k \in (\frac{b}{a}, +\infty)$ ，且 $|AF_2| = 2|F_2B|$ ， $\angle F_1AB = 60^\circ$ ，则直线 AB 的斜率是

- A. $2\sqrt{3}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. 2

第II卷（共90分）

二、填空题（本题共4道小题，每小题5分，共20分）

13. 已知向量 $\vec{a} = (1, -2)$ ， $\vec{b} = (2, x)$ ，若 $\vec{a} \perp \vec{b}$ ，则实数 $x =$ _____.

14. 已知实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} y \geq 0 \\ 4x + 3y \leq 4 \\ x - y \geq 0 \end{cases}$ ，则 $z = 3x + 2y$ 的最大值是_____.

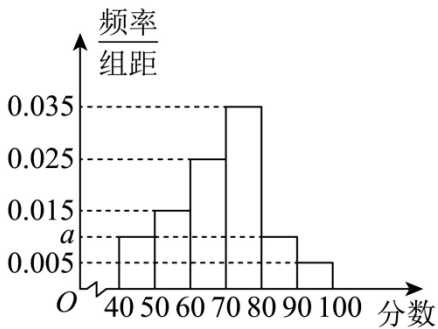
15. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $S_n = x \cdot (\frac{1}{3})^n + 27$ ，则 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 取最大值时， n 的值为_____.

16. 若 $x \geq 1$ ，恒有 $\ln \frac{x^2 + 1}{e^x - mx} \leq e^x - x^2 - mx - 1$ ，则 m 的取值范围是_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 12 分)

某校从高二年级学生中随机抽取 60 名学生, 将他们的期中成绩(均为整数)分成六段, $[40,50), [50,60), \dots, [90,100]$ 后得到如图所示的频率分布直方图, 观察图形, 回答下列问题:



(1) 求 a , 并估计此次期中考试成绩的众数.

(2) 利用分层抽样的方法从样本中成绩在 $[50,60)$ 和 $[80,90)$ 两个分数段内的学生中抽 5 人, 再从这 5 人中随机抽取 2 人, 求这 2 名学生的数学成绩之差的绝对值不大于 10 的概率.

18. (本小题满分 12 分)

已知
$$\begin{cases} \sin x = m, \\ \cos x = \sqrt{3}\lambda - \sqrt{3}m \end{cases} (m \in R), \text{ 设 } f(x) = \lambda.$$

(I) 求函数 $f(x)$ 的对称中心;

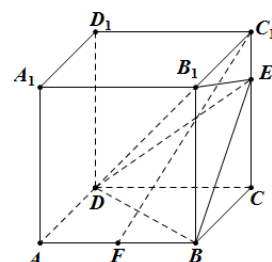
(II) 若 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $f(A) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 且 $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, D 是 BC 边的中点, 求线段 AD 长度的最大值.

19 (本小题满分 12 分)

如图, 棱长为 3 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $CE = 2EC_1$.

(I) 若 F 是线段 AB 的中点, 求证: $C_1F \parallel$ 平面 BDE ;

(II) 求三棱锥 $D - BB_1E$ 的体积.



20. (本小题满分 12 分)

已知点 F 是椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点, 过原点的直线交椭圆 E 于 A, B 两点, ΔABF 面积的最大值为 $\sqrt{3}$, $|OF|=1$.

(I) 求椭圆 E 的标准方程;

(II) 已知过点 $P(4, y_0)$ 的直线 l 与椭圆 E 交于 M, N 两点, 是否存在定点 P , 使得直线 FM, FN 的斜率之和为定值? 若存在, 求出定点 P 的坐标及该定值. 若不存在, 请说明理由.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = x^2 - ax, x > 0$.

(I) 是否存在实数 a 使得 $f(x) \geq 0$ 在区间 $[a, 2a+1]$ 上恒成立, 若存在, 求出 a 的取值范围, 若不存在, 请说明理由;

(II) 求函数 $h(x) = f(x) - a^2 \ln x$ 在区间 $(1, e^a)$ 上的零点个数 (e 为自然对数的底数).

选考题: 共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做, 则按所做的第一题计分。

[选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

22. (本小题满分 10 分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 倾斜角为 α 的直线 l 过定点 $(1, 0)$, 以 O 为极点, x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系,

曲线 C 的极坐标方程为 $\rho \sin^2 \theta = 4 \cos \theta$, 直线 l 与曲线 C 相交于不同的两点 A, B .

(I) 若 $\alpha = \frac{\pi}{3}$, 求线段 AB 中点 M 的直角坐标;

(II) 若 $P(1, 0)$, 求 $|PA| \cdot |PB|$ 的最小值.

[选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

23. (本小题满分 10 分)

已知函数 $f(x) = |x+1|$.

(I) 求不等式 $f(x) + f(2x-1) < x+7$ 的解集;

(II) 若对于正实数 a, b, c , 满足 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$, 证明: $f(x-a) + f(x+b+c) \geq 9$.

