2023—2024学年度下期高2024届二诊模拟考试

文科数学试卷参考答案：

一、选择题：

1-5. ADABC　6-10. ACDBA　11-12.　CB

二、填空题：

13. $7+4\sqrt{3}$　　14. $x^2+(y-2)^2=6$

15. 15.　$(2+\sqrt{3})x-y+1=0$或$(2-\sqrt{3})x+y-1=0$　　16.　$\sqrt{3}$

三、解答题：

17.【详解】(1) 因为$\left\{\dfrac{S_n}{a_n}\right\}$为等差数列，所以$\dfrac{2S_2}{a_2}=\dfrac{S_1}{a_1}+\dfrac{S_3}{a_3}$，即$\dfrac{2(a_1+a_2)}{a_2}=1+\dfrac{a_1+a_2+a_3}{a_3}$从而得到

$\dfrac{2(2a_1+d)}{a_1+d}=1+\dfrac{3a_1+3d}{a_1+2d}$，化简得$(a_1-d)d=0$　$\because d\neq 0$所以$a_1-d=0$

(2) 当$a_1-d=0$，$a_1=1$时，$a_n=n$，$\dfrac{1}{a_na_{n+1}}=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$，

所以$T_n=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)=1-\dfrac{1}{n+1}<\dfrac{8}{9}$，解得$n<8$，又因为$n\in\mathrm{N}^*$，

所以n的最大值7.

18.【详解】(1) 证明：在$\triangle ADC$中，$AD=DC=1$，$\angle ADC=90^\circ$，所以$AC=\sqrt{AD^2+DC^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$.

在$\triangle ABC$中，$AC=\sqrt{2}$，$AB=2$，$\angle BAC=45^\circ$，由余弦定理有：

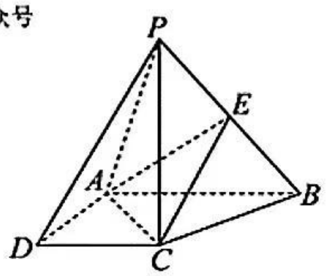
$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos45^\circ=4+2-2\times2\times\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=2$，所以，$AB^2=AC^2+BC^2$，所以$\angle ACB=90^\circ$，

所以$BC\perp AC$，又因为$BC\perp PA$，$PA\cap AC=A$，PA、$AC\subset$平面PAC，所以，$BC\perp$平面PAC，

因为$PC\subset$平面PAC，所以，$BC\perp PC$，在$\triangle PAC$中：$AC=\sqrt{2}$，$PC=2$，$PA=\sqrt{6}$，则$PA^2=AC^2+PC^2$，

所以，$PC\perp AC$，因为$AC\cap BC=C$，AC、$BC\subset$平面$ABCD$，所以$PC\perp$面$ABCD$.

(2) 解：$V_{P-ACE}=V_{P-ACB}-V_{E-ACB}=\dfrac{4}{9}$，设$\dfrac{BE}{BP}=\lambda$，来源：高三答案公众号



$\therefore\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}AC\cdot BC\cdot PC-\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}AC\cdot BC\cdot\lambda PC=\dfrac{4}{9}$

$\therefore\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times2-\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times2\lambda=\dfrac{4}{9}$

$\lambda=\dfrac{1}{3}$

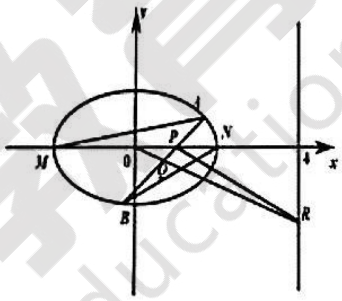
因此，存在点E使得三棱锥$P-ACE$的体积为$\frac{4}{9}$，且$\frac{BE}{BP}=\frac{1}{3}$.

19.【详解】(1) $P_1=1-(1-P_1)(1-P_2)(1-P_3)=1-\frac{49}{50}\times\frac{48}{49}\times\frac{47}{48}=\frac{3}{50}$.

(2) 对安装芯片Ⅰ的手机开机速度满意的人数为$40\times70\%=28$，对安装芯片Ⅱ的手机开机速度满意的人数为$60\times\frac{14}{15}=56$，所以采用分层抽样的方法的抽样比为$1:2$，故所抽取的6人中，手机安装芯片Ⅰ的有2人，手机安装芯片Ⅱ的有4人，所以抽到2人中对安装芯片Ⅱ的手机开机速度满意的人数为1的概率为

$P=\frac{C_2^1C_4^1}{C_6^2}=\frac{8}{15}$.来源：高三答案公众号

20.【详解】(1) 由题意：$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{1}{2}\\ 2b=2\sqrt{3}\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$，解得：$\begin{cases}a=2\\ b=\sqrt{3}\\ c=1\end{cases}$，故所求椭圆的标准方程为：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.



(2) 如图：因为直线AB斜率不为0，设其方程为：$x=ty+1$，代入椭圆方程：$3x^2+4y^2=12$，得：

$3(ty+1)^2+4y^2-12=0$，整理得：$(3t^2+4)y^2+6ty-9=0$，设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则：$y_1+y_2=-\frac{6t}{3t^2+4}$，

$y_1y_2=-\frac{9}{3t^2+4}$；$\because x_1+x_2=t(y_1+y_2)+2=-\frac{6t^2}{3t^2+4}+2=\frac{8}{3t^2+4}$

$\therefore Q\left(\frac{4}{3t^2+4},-\frac{3t}{3t^2+4}\right)$，则直线$OQ$方程为$y=-\frac{3t}{4}x$，令$x=4$，得$y=-3t$，则$R(4,-3t)$，$\because P(1,0)$

则$k_{PR}=-t$，$k_{AM}=\frac{y_1}{x_1+2}$，$k_{BN}=\frac{y_2}{x_2-2}$，$\therefore k_{BN}(k_{AM}-k_{PR})=\frac{y_2}{x_2-2}\left(\frac{y_1}{x_1+2}+t\right)=\frac{y_2}{ty_2-1}\left(\frac{y_1}{ty_1+3}+t\right)$

$=\frac{(1+t^2)y_1y_2+3ty_2}{t^2y_1y_2+3ty_2-ty_1-3}=\frac{3ty_2-\frac{9t^2+9}{3t^2+4}}{3ty_2-ty_1-\frac{18t^2+12}{3t^2+4}}$，又$\because y_1=-\frac{6t}{3t^2+4}-y_2$代入得

$$k_{BN}(k_{AM}-k_{PR})=\frac{3ty_2-\frac{9t^2+9}{3t^2+4}}{3ty_2-t\left(-\frac{6t}{3t^2+4}-y_2\right)-\frac{18t^2+12}{3t^2+4}}=\frac{3ty_2-\frac{9t^2+9}{3t^2+4}}{4ty_2-\frac{12t^2+12}{3t^2+4}}=\frac{3}{4}.$$

所以$k_{BN}(k_{AM}-k_{PR})$为定值$\frac{3}{4}$.

21.【详解】(1) 函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，

$f'(x)=\frac{1}{2}\left[2x\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)+x\right]+a(\ln x-1+1)=x\ln x+a\ln x=(x+a)\ln x$，

当$a=-2$时，$f'(x)=(x-2)\ln x$，解不等式$f'\ \ x\ >0$，有$x>2$或$0<x<1$，令$f'(x)<0$得$1<x<2$，

故函数$f(x)$的增区间为$(0,1)$，$(2,+\infty)$，减区间为$(1,2)$；来源：高三答案公众号

(2) 若$a>0$，函数$f(x)$的减区间为$(0,1)$，增区间为$(1,+\infty)$，且$f(1)=-\frac{1}{4}-a<0$，

当$0<x<1$时，由$\ln x<0$，有$f(x)=x\left[\frac{1}{2}x\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)+a(\ln x-1)\right]<0$恒成立，

所以$f(x)>0$，必有$a<0$．又由$f(1)=-a-\frac{1}{4}>0$，可得$a<-\frac{1}{4}$．

又由$x>0$，不等式$f(x)>0$可化为$\frac{1}{2}x\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)+a(\ln x-1)>0$，设$g(x)=\frac{1}{2}x\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)+a(\ln x-1)$，

有$g'(x)=\frac{1}{2}\left(\ln x+\frac{1}{2}\right)+\frac{a}{x}=\frac{1}{2}\ln x+\frac{a}{x}+\frac{1}{4}=\frac{2x\ln x+x+4a}{4x}$，

当$0<x<1$且$0<x<-4a$时，$\ln x<0$，$x+4a<0$，可得$g'(x)<0$，

当$x>1$且$x>-4a$时，$\ln x>0$，$x+4a>0$，可得$g'(x)>0$，当$a<0$时，函数$y=\frac{1}{2}\ln x+\frac{a}{x}+\frac{1}{4}$单调递增，

故存在正数m使得$2m\ln m+m+4a=0$．若$0<m\le1$，有$\ln m\le0$，$4a<-1$，有$2m\ln m+m+4a<m-1<0$，

与$2m\ln m+m+4a=0$矛盾，可得$m>1$，当$x>m$时，$g'(x)>0$；当$x<m$时，$g'(x)<0$，

可得函数$g(x)$的减区间为$(0,m)$，增区间为$(m,+\infty)$，

若$g(x)>0$，必有$g(m)=\frac{1}{2}m\left(\ln m-\frac{1}{2}\right)+a(\ln m-1)>0$，有$2m\ln m-m+4a\ln m-4a>0$，

又由$2m\ln m+m+4a=0$，有$2m\ln m-m+4a\ln m-4a+(2m\ln m+m+4a)>0$，

有$m\ln m+a\ln m>0$，有$(m+a)\ln m>0$．又由$m>1$，有$m>-a$，可得$a>-m$，

有$2m\ln m+m+4a=0>2m\ln m+m-4m=2m\ln m-3m$，可得$1<m<e^{\frac{3}{2}}$，

由$a=-\frac{1}{4}(2m\ln m+m)$，及$1<2m\ln m+m<4e^{\frac{3}{2}}$，可得$-e^{\frac{3}{2}}<a<-\frac{1}{4}$，

若$f(x)>0$．则实数a的取值范围为$\left(-e^{\frac{3}{2}},-\frac{1}{4}\right)$．

22.【详解】(1) 直线C_1的参数方程为$\begin{cases}x=t\cos\alpha\\y=t\sin\alpha\end{cases}$（$t$为参数，$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$），故$y=(\tan\alpha)x$，则

$\rho\sin\theta=(\tan\alpha)\rho\cos\theta$，即 $\theta=\alpha$；故 C_1 的极坐标方程为：$\theta=\alpha, 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.把 C_1 绕坐标原点逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 得到 C_2，故 C_2 的极坐标方程为：$\theta=\alpha+\frac{\pi}{2}, 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

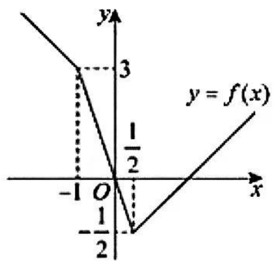
（2）曲线 C_3 的极坐标方程为 $\rho=8\sin\theta$，且 C_1 与 C_3 交于点 A，C_2 与 C_3 交于点 B，联立方程得，

$A(8\sin\alpha,\alpha), B\left(8\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right),\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$，

故 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|OA||OB|\sin\angle AOB=\frac{1}{2}\times 8\sin\alpha\times 8\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\times\sin\frac{\pi}{2}=32\sin\alpha\cos\alpha=16\sin 2\alpha\le 16$.

故当 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 时，ΔAOB 面积的最大值为 16

23.【详解】（1）$f(x)=|2x-1|-|x+1|=\begin{cases} x-2, x>\frac{1}{2} \\ -3x, -1\le x\le\frac{1}{2} \\ -x+2, x<-1 \end{cases}$，作出函数 $f(x)$ 的图形，



如图，由图可知 $f(x)$ 的最小值为 $m=-\frac{3}{2}$.

（2）由（1）知，$m=-\frac{3}{2}$，所以 $a-2b+2c=1$，根据柯西不等式得

$(a^2+b^2+c^2)\left[1^2+(-2)^2+2^2\right]\ge(a-2b+2c)^2=1$，当且仅当 $\frac{a}{1}=\frac{b}{-2}=\frac{c}{2}$ 时取等号，又 $a-2b+2c=1$，所以当且仅当 $a=\frac{1}{9}, b=-\frac{2}{9}, c=\frac{2}{9}$ 时取等号，$\therefore a^2+b^2+c^2\ge\frac{1}{9}$.