

2023—2024 学年度下期高 2024 届二诊模拟考试

文科数学试卷

考试时间：120 分钟 满分：150 分

第 I 卷（选择题）

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{x | y = \sqrt{x} + \log_3(3-x)\}$, 则 $A \cap B = ()$

- A. $\{0, 1, 2\}$ B. $\{1, 2\}$ C. $\{-1, 0\}$ D. $\{0, 1\}$

2. 空间中有平面 α 和直线 a, b , 若 $a // \alpha$, $a // b$, 则下列说法中一定错误的是 ()

- A. 直线 b 平行于平面 α B. 直线 b 在平面 α 内
C. 直线 a 和 b 共面 D. 直线 b 与平面 α 交于一点

3. 已知 i 是虚数单位, $a \in \mathbb{R}$, 则“ $(a+i)^2 = 2i$ ”是“ $a^2 = 1$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

4. 用反证法证明“平面四边形中至少有一个内角不超过 90° ”, 下列假设中正确的是 ()

- A. 假设有两个内角超过 90° B. 假设四个内角均超过 90°
C. 假设至多有两个内角超过 90° D. 假设有三个内角超过 90°

5. 2023 年 7 月 28 日, 第 31 届世界大学生夏季运动会 (简称大运会) 在四川成都开幕, 这是继 2001 年北京大运会, 2011 深圳大运会之后, 中国第三次举办夏季大运会; 在成都大运会中, 中国代表团取得了骄人的成绩. 为向大学生普及大运会的相关知识, 某高校进行“大运会知识竞赛”,

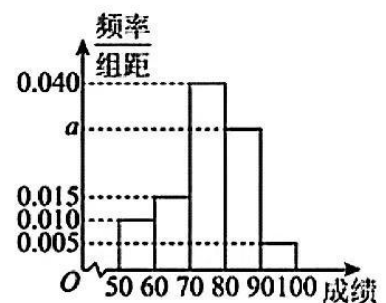
并随机从中抽取了 100 名学生的成绩 (满分 100 分) 进行统计, 成绩均在

$[50, 100]$ 内, 将其分成 5 组: $[50, 60)$, $[60, 70)$, $[70, 80)$, $[80, 90)$, $[90, 100]$,

并整理得到如下的频率分布直方图, 则在被抽取的学生中, 成绩落在区间

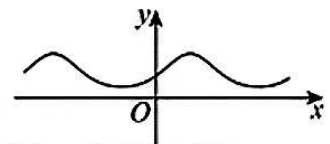
$[80, 90)$ 内的人数为 ()

- A. 10 B. 20 C. 30 D. 40



6. 华罗庚是享誉世界的数学大师, 国际上以华氏命名的数学科研成果有“华氏定理”“华氏不等式”“华氏算子”“华—王方法”等, 其斐然成绩早为世人所推崇. 他

曾说: “数缺形时少直观, 形缺数时难入微”, 告知我们把“数”与“形”, “式”与“图”



来源: 高三答案公众号

结合起来是解决数学问题的有效途径. 在数学的学习和研究中, 常用函数的图象来研究函数的性质, 也常用函数的解析式来分析函数图象的特征. 已知函数 $y = f(x)$ 的图象如图所示, 则 $f(x)$ 的解析式可能是 ()

7. 已知双曲线 E 的中心在原点，对称轴为坐标轴，且经过点 $(-2, -1)$, $(\sqrt{6}, \sqrt{6})$ ，则下列结论中错误的是

()

- A. E 的标准方程为 $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ B. E 的离心率等于 $\frac{\sqrt{6}}{2}$
 C. E 与双曲线 $\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{4} = 1$ 的渐近线不相同 D. 直线 $x - y - 1 = 0$ 与 E 有且仅有一个公共点

8. 《周髀算经》中给出的弦图是由四个全等的直角三角形和中间一个小正方形拼成的一个大的正方形，若下图中所示的角为 α ($0^\circ < \alpha < 45^\circ$)，且小正方形与大正方形面积之比为 $1:25$ ，则 $\tan \alpha$ 的值为 ()



- A. $\frac{25}{24}$ B. $\frac{24}{25}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{3}{4}$

9. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，面积为 S ，若 $a \sin \frac{A+C}{2} = b \sin A$, $6S = \sqrt{3} \vec{AB} \cdot \vec{AC}$ ，则 $\triangle ABC$ 的形状是 ()

- A. 等腰三角形 B. 直角三角形 C. 正三角形 D. 等腰直角三角形

10. 若函数 $f(x) = xe^x - \ln x$ 的最小值为 m ，则函数 $g(x) = \ln x - xe^{x+1}$ 的最大值为 ()

- A. $-m-1$ B. $-em+1$ C. $-m+1$ D. $-em-1$

11. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ， $AB \perp BC$ ，且 $\angle PDA = 45^\circ$ ， $AD + CD = 4$ 。若点 P, A, B, C, D 均在球 O 的表面上，则球 O 的体积的最小值为 ()

- A. $\frac{32}{3}\pi$ B. $4\sqrt{3}\pi$ C. $\frac{64\sqrt{6}}{27}\pi$ D. $\frac{32\sqrt{3}\pi}{27}$

12. 已知函数 $f(x) = e^x - \frac{1}{2(a+1)}x^2 - bx$ ($a, b \in \mathbb{R}$) 没有极值点，则 $\frac{b}{a+1}$ 的最大值为 ()

- A. $\frac{\sqrt{e}}{2}$ B. $\frac{e}{2}$ C. e D. $\frac{e^2}{2}$

第 II 卷 (非选择题)

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知实数 $x > 0, y > 0$ ，若 $2x + 3y = 1$ ，则 $\frac{2}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值为_____。

14. 已知圆 C 的圆心与抛物线 $y^2 = 8x$ 的焦点关于直线 $y = x$ 对称，直线 $2x - y - 3 = 0$ 与圆 C 相交于 A, B 两点，

且 $|AB|=2$ ，则圆 C 的方程为_____。

15. 已知直线 l 经过点 $P(0,1)$ ，且被两条平行直线 $l_1: \sqrt{3}x+y+1=0$ 和 $l_2: \sqrt{3}x+y+5=0$ 截得的线段长为 $2\sqrt{2}$ ，则直线 l 的方程为_____。

16. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，离心率为 $\frac{2}{3}$ ，若 A 和 B 为椭圆 C 上在 x 轴上方的两点，且 $\overline{BF_1} = 2\overline{AF_2}$ ，则直线 AF_2 的斜率为_____。

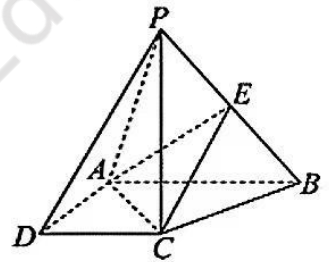
三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22, 23 题为选考题，考生根据要求作答。

17. (本小题满分 12 分) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 \neq 0$ ，公差为 $d (d \neq 0)$ ， S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和， $\left\{ \frac{S_n}{a_n} \right\}$ 为等差数列。

(1) 求 a_1 与 d 的关系；

(2) 若 $a_1 = 1$ ， T_n 为数列 $\left\{ \frac{1}{a_n a_{n+1}} \right\}$ 的前 n 项和，求使得 $T_n < \frac{8}{9}$ 成立的 n 的最大值。

18. (本小题满分 12 分) 在四棱锥 $P-ABCD$ 中，已知 $AB \parallel CD$ ， $AB \perp AD$ ， $BC \perp PA$ ， $AB = 2AD = 2CD = 2$ ， $PA = \sqrt{6}$ ， $PC = 2$ ， E 是线段 PB 上的点。



(1) 求证： $PC \perp$ 底面 $ABCD$ ；

(2) 是否存在点 E 使得三棱锥 $P-ACE$ 的体积为 $\frac{4}{9}$ ？若存在，求出 $\frac{BE}{BP}$ 的值；若不存在，请说明理由。

19. (本小题满分 12 分) 2022 年二十国集团领导人第十七次峰会 11 月 16 日在印度尼西亚巴厘岛闭幕，峰会通过《二十国集团领导人巴厘岛峰会宣言》。宣言说，值此全球经济关键时刻，二十国集团采取切实、精准、迅速和必要的行动至关重要，基于主席国印尼提出的“共同复苏、强劲复苏”主题，各国将采取协调行动，推进强劲、包容、韧性的全球复苏以及创造就业和增长的可持续发展、中国采取负责任的态度，积极推动产业的可持续发展，并对友好国家进行技术援助。非洲某芯片企业生产芯片 I 有四道工序，前三道工序的生产互不影响，第四道是检测评估工序，包括智能自动检测与人工抽检。

(1) 在中国企业援助前，该芯片企业生产芯片 I 的前三道工序的次品率分别为 $P_1 = \frac{1}{50}$ ， $P_2 = \frac{1}{49}$ ， $P_3 = \frac{1}{48}$ 。

求生产该芯片 I 的前三道工序的次品率 P_i ；

(2) 该芯片企业在中国企业援助下，改进生产工艺并生产了芯片 II。某手机生产厂商获得芯片 I 与芯片 II，并在某款新型手机上使用。现对使用这款手机的用户回访，对开机速度进行满意度调查，据统计，回访的 100 名

用户中，安装芯片I的有40部，其中对开机速度满意的占70%；安装芯片II的有60部，其中对开机速度满意的占 $\frac{14}{15}$ 。现采用分层抽样的方法从开机速度满意的人群中抽取6人，再从这6人中选取2人进行座谈，求抽到2人对安装芯片II的手机开机速度满意的人数为1的概率。来源：高三答案公众号

20. (本小题满分12分) 已知椭圆 $M: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$ ，短轴长为 $2\sqrt{3}$ ，过点 $P(1, 0)$ 斜率存在且不为0的直线 l 与椭圆有两个不同的交点 A, B 。

(1)求椭圆的标准方程；

(2)椭圆左右顶点为 M, N ，设 AB 中点为 Q ，直线 OQ 交直线 $x=4$ 于点 R ， $k_{RN}(k_{QM} - k_{PN})$ 是否为定值？若是请求出定值，若不是请说明理由。

21. (本小题满分12分) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) + ax(\ln x - 1)$ ，其中 $a \neq 0$ 。

(1)当 $a = -2$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2)若 $f(x) > 0$ ，求实数 a 的取值范围。

(二) 选考题：共10分。请考生在第22、23题中选一题作答。如果多选，则按所做的第一题记分。

22. 【选修4-4：坐标系与参数方程】(本小题满分10分) 在直角坐标系 xOy 中，直线 C_1 的参数方程为

$$\begin{cases} x = t \cos \alpha \\ y = t \sin \alpha \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}), \text{ 把 } C_1 \text{ 绕坐标原点逆时针旋转 } \frac{\pi}{2} \text{ 得到 } C_2, \text{ 以坐标原点 } O \text{ 为极点, } x \text{ 轴正}$$

半轴为极轴，取相同的单位长度建立极坐标系。

(1)写出 C_1, C_2 的极坐标方程；

(2)若曲线 C_3 的极坐标方程为 $\rho = 8 \sin \theta$ ，且 C_1 与 C_3 交于点 A, C_2 与 C_3 交于点 $B(A, B$ 与点 O 不重合)，求 $\triangle AOB$ 面积的最大值。

23. 【选修4-5：不等式选讲】(本小题满分10分) 已知函数 $f(x) = |2x-1| - |x+1|$ 的最小值为 m 。

(1)求实数 m 的值；

(2)若实数 a, b, c 满足 $a - 2b + 2c = m + \frac{5}{2}$ ，证明： $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{9}$ 。