

成都石室中学 2023-2024 年度上期高 2024 届期末考试 数学试题（理）

（总分：150 分，时间：120 分钟）

第 I 卷（共 60 分）

一、选择题（本题共 12 道小题，每小题 5 分，共 60 分）

1. 若复数 z 满足 $zi = 2 - i$ (i 是虚数单位)，则 $\bar{z} =$ ()

- A. $-1 + 2i$ B. $-1 - 2i$ C. $1 - 2i$ D. $1 + 2i$

2. 已知集合 $M = \{y | y = 2^x, x \leq 1\}$, $N = \{x | y = \sqrt{x - x^2}\}$, 则 $M \cup N$ 等于 ()

- A. $(0, 1]$ B. $\{2\}$ C. $[0, 2]$ D. $(-\infty, 2]$

3. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_{13} = 26$, 则 $a_3 + a_8 + a_{10}$ 的值为 ()

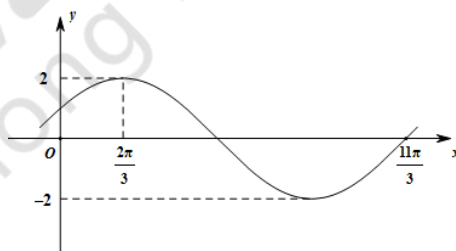
- A. 6 B. 7 C. 8 D. 9

4. $\left(x + \frac{y^2}{x}\right)(x - y)^5$ 的展开式中, x^3y^3 的系数为 ()

- A. -15 B. -5 C. 5 D. 15

5. 函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 部分图象如图所示, 则 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) =$ ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{1}{2}$
C. $-\sqrt{3}$ D. $\sqrt{3}$



6. 已知圆 $C: x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$ 与中心在原点, 焦点在坐标轴上的双曲线 D 的一条渐近线相切, 则双曲线 D 的离心率为 ()

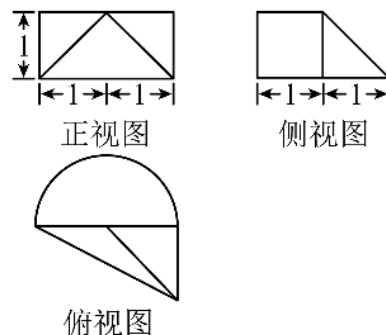
- A. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ B. 3 C. $\sqrt{3}$ 或 $\frac{\sqrt{6}}{2}$ D. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ 或 $\frac{3}{2}$

7. 已知函数 $f(x)$ 是偶函数, 当 $x < 0$ 时, $f(x) = x^3 - x + 1$, 则曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线方程为

- ()
A. $2x + y - 1 = 0$ B. $2x - y - 3 = 0$
C. $2x + y - 3 = 0$ D. $2x - y - 1 = 0$

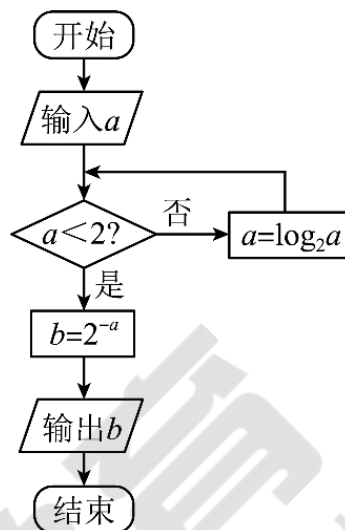
8. 已知一个组合体的三视图如图所示, 则该几何体的表面积为 ()

- A. $2\pi + 2 + \sqrt{2}$ B. $2\pi + \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$
C. $2\pi + 2 + \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$ D. $2\pi + 3 + \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$



9. 执行如图所示的程序框图，若随机输入的 $a \in [0, 16]$ ，则输出的 $b \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ 的概率为 ()

- A. $\frac{3}{16}$ B. $\frac{15}{16}$
 C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{3}{4}$



10. 若 $2^x = 3$ ， $3^y = 4$ ，则下列选项正确的是 ()

- A. $y > \frac{3}{2}$ B. $x < y$
 C. $\frac{1}{x} + y > 2$ D. $x + y > 2\sqrt{2}$

11. 已知长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 在球 O 的内部，球心 O 在平面 $ABCD$

上，若球的半径为 $\sqrt{3}$ ， $AB = BC$ ，则该长方体体积的最大值是

- ()
 A. 4 B. 8 C. 12 D. 18

12. 曲线 C 是平面内与三个定点 $F_1(-1, 0)$ ， $F_2(1, 0)$ 和 $F_3(0, 1)$ 的距离的和等于 $2\sqrt{2}$ 的点的轨迹. 给出下列四个结论:

- ① 曲线 C 关于 x 轴、 y 轴均对称;
- ② 曲线 C 上存在点 P ，使得 $|PF_3| = \frac{2\sqrt{2}}{3}$;
- ③ 若点 P 在曲线 C 上，则 $\triangle F_1PF_2$ 的面积最大值是 1;
- ④ 曲线 C 上存在点 P ，使得 $\angle F_1PF_2$ 为钝角.

其中所有正确结论的序号是 ()

- A. ②③④ B. ②③ C. ③④ D. ①②③④

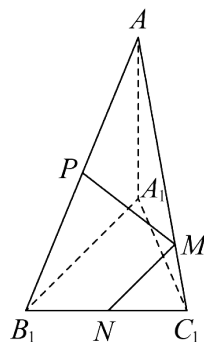
第 II 卷 (共 90 分)

二、填空题 (本题共 4 道小题，每小题 5 分，共 20 分)

13. 若 x 、 y 满足约束条件 $\begin{cases} x + 2y \geq 8 \\ 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 3 \end{cases}$ ，则 $z = x + y$ 的最大值为_____.

14. 设 $f(x) = \frac{1}{x} + \log_2 \frac{2}{x}$ ，则不等式 $f\left(\frac{1}{x} - 1\right) > \frac{1}{2}$ 的解集为_____.

15. 已知 $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) = \frac{\sqrt{2}}{3}$ ，则 $\cos\left(2\alpha + \frac{4\pi}{3}\right)$ 的值为_____.



16. 如图，在三棱锥 $A - A_1B_1C_1$ 中， $AA_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$ ， $\angle A_1B_1C_1 = 90^\circ$ ， $A_1B_1 = 2A_1A = 2B_1C_1 = 2$ ， P 为线段 AB_1

的中点， M, N 分别为线段 AC_1 和线段 B_1C_1 上任意一点，则 $\sqrt{5}PM + MN$ 的最小值为_____.

三、解答题（本题共 6 道小题，共 70 分）

17. 某学校研究性学习小组在学习生物遗传学的过程中，为验证高尔顿提出的关于儿子成年后身高 y （单位：cm）与父亲身高 x （单位：cm）之间的关系及存在的遗传规律，随机抽取了 5 对父子的身高数据，如下表：

父亲身高 x	160	170	175	185	190
儿子身高 y	170	174	175	180	186

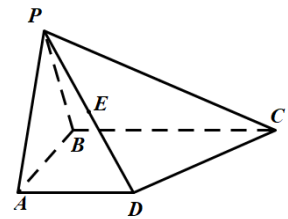
参考数据及公式： $\sum_{i=1}^5 x_i = 880$ ， $\sum_{i=1}^5 x_i^2 = 155450$ ， $\sum_{i=1}^5 y_i = 885$ ， $\sum_{i=1}^5 x_i y_i = 156045$ ， $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$ ，

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$$

- 根据表中数据，求出 y 关于 x 的线性回归方程；
- 小明的父亲身高 178cm，请你利用回归直线方程预测小明成年后的身高。

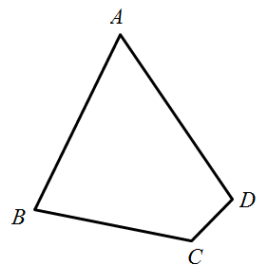
18. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为直角梯形， $AB \perp AD$ ， $AD \parallel BC$ ，侧面 $PAB \perp$ 面 $ABCD$ ， $PA = AB = AD = 2$ ， $BC = 4$ ， E 为 PD 的中点。

- 求证：面 $PBC \perp$ 面 PDC ；
- 若二面角 $P-AD-B$ 的大小为 60° ，求 BE 与面 PBC 所成角的正弦值。



19. 为加强学生劳动教育，成都石室中学北湖校区将一块四边形园地 $ABCD$ 用于蔬菜种植实践活动。经测量，边界 AB 与 AD 的长度都是 14 米， $\angle BAD = 60^\circ$ ， $\angle BCD = 120^\circ$ 。

- 若 DC 的长为 6 米，求 BC 的长；
- 现需要沿实验园的边界修建篱笆以提醒同学们不要随意进入，问所需要篱笆的最大长度为多少米？



20. 已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 抛物线 $C_2: y^2 = 4x$ 在第一象限与椭圆 C_1 交于点 A , 点 F 为抛物线 C_2 的焦点, 且满足 $|AF| = \frac{5}{3}$.

(1) 求椭圆 C_1 的方程;

(2) 设直线 $x = my + 1$ 与椭圆 C_1 交于 P, Q 两点, 过 P, Q 分别作直线 $l: x = t (t > 2)$ 的垂线, 垂足为 M, N , l 与 x 轴的交点为 T . 若 $\triangle PMT, \triangle PQT, \triangle QNT$ 的面积成等差数列, 求实数 m 的取值范围.

21. 已知函数 $f(x) = x - \frac{1}{x} - m \ln x - m$, 其中 e 是自然对数的底数.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $m = 1$, 设关于 x 的不等式 $f(x) \leq x \ln x - \frac{1}{x} - kx + n$ 对 $\forall x \in [1, e]$ 恒成立时 k 的最大值为 $c (k \in \mathbf{R}, n \in [1, e])$, 求 $n + c$ 的取值范围.

选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

[选修 4-4：坐标系与参数方程] (10 分)

22. 已知圆 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = -1 + 4 \cos \beta \\ y = 1 + 4 \sin \beta \end{cases}$ (β 为参数), 以坐标原点为极点, x 轴非负半轴为极轴建立极坐标系.

(1) 求圆 C 的极坐标方程;

(2) 若直线 l 的参数方程是 $\begin{cases} x = t \cos \alpha \\ y = t \sin \alpha \end{cases}$ (t 为参数, α 为直线 l 的倾斜角), l 与 C 交于 A, B 两点,

$|AB| = 2\sqrt{14}$, 求 l 的斜率.

23. 已知函数 $f(x) = |x - 2|$.

(1) 求不等式 $f(x) \geq 2x - 5$ 的解集;

(2) 若 $f(x) \geq 3 - |x + a|$ 恒成立, 求 a 的取值范围.