

成都石室中学 2023-2024 年度上期高 2024 届期末考试

数学试题（文）

参考答案

1. 若复数 z 满足 $zi = 2 - i$ (i 是虚数单位), 则 $\bar{z} =$ ()

- A. $-1 + 2i$ B. $-1 - 2i$ C. $1 - 2i$ D. $1 + 2i$

【答案】A

【分析】计算 $z = \frac{2-i}{i} = -1 - 2i$, 再计算共轭复数即可.【详解】 $zi = 2 - i$, 则 $z = \frac{2-i}{i} = -1 - 2i$, 则 $\bar{z} = -1 + 2i$.

故选: A

2. 已知集合 $M = \{y | y = 2^x, x \leq 1\}$, $N = \{x | y = \sqrt{x - x^2}\}$, 则 $M \cup N$ 等于 ()

- A. $(0, 1]$ B. $\{2\}$ C. $[0, 2]$ D. $(-\infty, 2]$

2 · C

【分析】根据指数函数单调性得到 $M = (0, 2]$, 解不等式求出 $N = [0, 1]$, 利用并集概念求出答案.【详解】 $y = 2^x \in (0, 2]$, 故 $M = (0, 2]$,令 $x - x^2 \geq 0$, 解得 $0 \leq x \leq 1$, 故 $N = [0, 1]$,故 $M \cup N = [0, 2]$.

故选: C

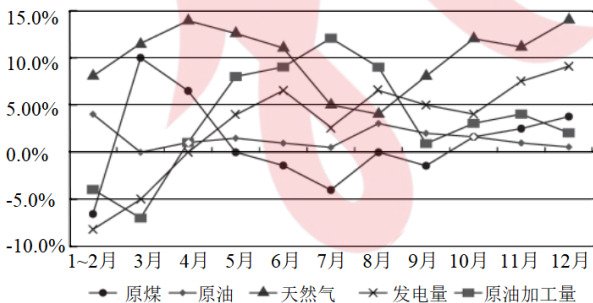
3. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_{13} = 26$, 则 $a_3 + a_8 + a_{10}$ 的值为

- A. 6 B. 7 C. 8 D. 9

【答案】选 A

【解析】由 $S_{13} = 13a_7 = 26$, 可得 $a_7 = 2$, 则 $a_3 + a_8 + a_{10} = 3a_7 = 6$.

4. 下图是 2023 年 1~12 月份品种能源生产当月同比增长率情况变化图. 下列说法错误的是



- A. 4~7月, 原煤及天然气当月同比增长率呈下降趋势
 B. 9~12月, 原煤及天然气当月同比增长率总体呈上升趋势
 C. 7月份品种能源生产当月同比增长率最高的是原油加工量同比增长率
 D. 2023年分品种能源生产当月同比增长率波动最小的是发电量同比增长率

【答案】D

【解析】观察题中所给的折线图，可知：

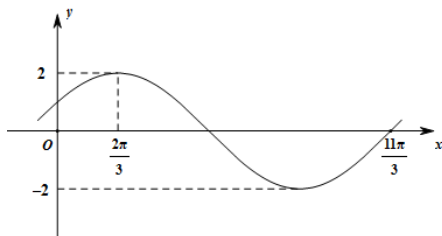
4~7月，原煤及天然气当月同比增长率是下降的，呈下降趋势，所以 A 项正确；

9~12月，虽然天然气 11 月比 10 月偏低，但总体趋势仍为上升的，所以原煤及天然气当月同比增长率总体呈上升趋势，所以 B 正确；

图中 7 月份，只有原煤加工上升，其他品种能源均比 6 月份低，所以 C 项正确；

由图易知，相比发电量，原油的曲线波动幅度更小，所以 D 项错误；

5. 函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 部分图象如图所示，则 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) =$



- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $-\sqrt{3}$ D. $\sqrt{3}$

【答案】选 D

【解析】由函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的部分图象知， $A = 2$ ， $\frac{3}{4}T = \frac{11\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = 3\pi$ ，

解得 $T = 4\pi = \frac{2\pi}{\omega}$ ， $\therefore \omega = \frac{1}{2}$ ，又 $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2 \sin\left(\frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{3} + \varphi\right) = 2$ ，可得 $\frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{3} + \varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ， $k \in \mathbb{Z}$ ，

解得 $\varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$ ， $k \in \mathbb{Z}$ ， $\because |\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ， \therefore 可得 $\varphi = \frac{\pi}{6}$ ， $\therefore f(x) = 2 \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6}\right)$ ，

$\therefore f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \sin\left(\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = 2 \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ 。

6. 已知圆 $C: x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$ 与中心在原点、焦点在坐标轴上的双曲线 D 的一条渐近线相切，则双曲线 D 的离心率为 ()

- A. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ B. 3 C. $\sqrt{3}$ 或 $\frac{\sqrt{6}}{2}$ D. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ 或 $\frac{3}{2}$

【答案】D

【分析】分双曲线的焦点在 x 轴上和 y 轴上，由圆心到渐近线的距离等于半径列式求解即可。

【详解】因为 $C: x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$ 可化为 $(x-3)^2 + y^2 = 4$ ，

则圆 C 的圆心为 $(3, 0)$ ，半径为 2，

当双曲线的焦点在 x 轴上时，设双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，则其渐近线方程为 $bx \pm ay = 0$ ，

由题意得 $\frac{3b}{\sqrt{b^2 + a^2}} = 2$ ，即 $5b^2 = 4a^2$ ，所以 $\frac{b^2}{a^2} = \frac{4}{5}$ ，

所以 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{4}{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ ，

当双曲线的焦点在 y 轴上时，设双曲线方程为 $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ ，则其渐近线方程为 $ax \pm by = 0$ ，

由题意得 $\frac{3a}{\sqrt{b^2+a^2}}=2$ ，即 $5a^2=4b^2$ ，所以 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{5}{4}$ ，

$$\text{则 } e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{5}{4}} = \frac{3}{2}$$

故选：D.

7. 已知函数 $f(x)$ 是偶函数，当 $x < 0$ 时， $f(x) = x^3 - x + 1$ ，则曲线 $y = f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为

- A. $2x + y - 1 = 0$ B. $2x - y - 3 = 0$ C. $2x + y - 3 = 0$ D. $2x - y - 1 = 0$

【答案】选 C

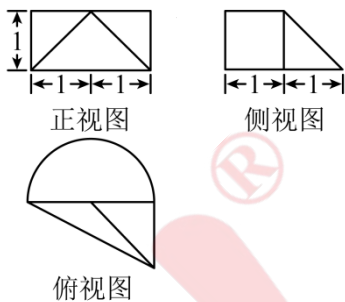
【解析】因为 $x < 0$ ， $f(x) = x^3 - x + 1$ ， $f(-1) = 1$ ，又由 $f(x)$ 是偶函数， $\therefore f(1) = 1$ ，

令 $-x < 0$ ，则 $f(-x) = -x^3 + x + 1$ ，根据 $f(x)$ 是偶函数， $f(-x) = f(x)$ ，

得到 $x > 0$ 时， $f(x) = -x^3 + x + 1$ ，所以， $x > 0$ 时， $f'(x) = -3x^2 + 1$ ， $f'(1) = -2$ ，

故曲线 $y = f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y - 1 = -2(x - 1)$ ，即 $2x + y - 3 = 0$ 。

8. 已知一个组合体的三视图如图所示，则该几何体的表面积为 ()



A. $2\pi + 2 + \sqrt{2}$

B. $2\pi + \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$

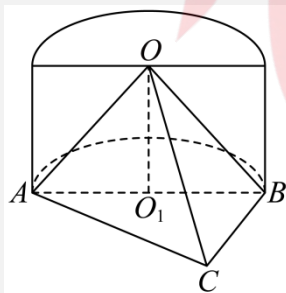
C. $2\pi + 2 + \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$

D. $2\pi + 3 + \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$

【答案】C

【分析】先由三视图原几何体，再分别求得各面的面积相加即可得解.

【详解】由题知，该三视图对应的几何体的直观图如图所示，



其中半圆柱的底面半径为 1、高为 1，三棱锥 $O-ABC$ 中， O 在底面 ABC 的射影 O_1 为 AB 的中点， $BC \perp AB$ ， $BC=1$ ，

$$\therefore OA = OB = \sqrt{2}, \quad AC = \sqrt{5}$$

因为 $OO_1 \perp$ 面 ABC ， $BC \subset$ 面 ABC ，所以 $BC \perp OO_1$ ，

又 $BC \perp AB$ ， $AB \cap OO_1 = O_1$ ， $AB, OO_1 \subset$ 面 ABO ，所以 $BC \perp$ 面 ABO ，

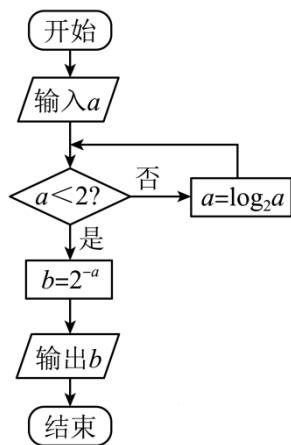
又 $OB \subset$ 面 ABO ，故 $BC \perp OB$ ，

$\therefore OC = \sqrt{3}$ ， $\therefore AC^2 = OA^2 + OC^2$ ， $\therefore OA \perp OC$ ，

\therefore 该几何体的表面积为 $\pi \times 1 \times 1 + \pi \times 1^2 + 2 \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 + \frac{1}{2} \times 2 \times 1 + \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} = 2\pi + 2 + \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$ 。

故选：C。

9. 执行如图所示的程序框图，若随机输入的 $a \in [0, 16)$ ，则输出的 $b \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ 的概率为 ()



A. $\frac{3}{16}$

B. $\frac{15}{16}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{3}{4}$

【答案】B

【分析】根据 $b \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ 可得 $a \in [1, 2)$ ，再根据循环结构可得当 $a \in [1, 16)$ 时均能得到 $b \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ ，从而可得答案。

【详解】由框图可得若 $b \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ ，则 $\frac{1}{4} < 2^{-a} \leq \frac{1}{2}$ ，解得 $a \in [1, 2)$ 。

故当 $a \in [0, 1)$ ，满足 $a < 2$ ，可得输出 $b \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ ；

当 $a \in [1, 2)$ 时，满足 $a < 2$ ，可得输出 $b \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ ；

当 $a \in [2, 4)$ 时，不满足 $a < 2$ ，此时 $a = \log_2 a \in [1, 2)$ ，故可得输出 $b \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ ；

当 $a \in [4, 16)$ 时，不满足 $a < 2$ ，此时 $a = \log_2 a \in [2, 4)$ ；

不满足 $a < 2$ ，此时 $a = \log_2 a \in [1, 2)$ ，可得输出 $b \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ 。

故当 $a \in [1, 16)$ 时均能得到 $b \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ ，故输出的 $b \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ 的概率为 $\frac{16-1}{16} = \frac{15}{16}$ 。

故选：B

10. 若 $2^x = 3$ ， $3^y = 4$ ，则下列选项正确的是

A. $y > \frac{3}{2}$ B. $x < y$ C. $\frac{1}{x} + y > 2$ D. $x + y > 2\sqrt{2}$

【答案】选 D

【解析】因为 $2^x = 3$, $3^y = 4$, 所以 $x = \log_2 3, y = \log_3 4$,

因为 $\log_2 3 > \log_2 2^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$, $\log_3 4 < \log_3 3^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$, 即 $x > \frac{3}{2}, y < \frac{3}{2}$, 所以 $x > y$, 所以 A, B 错误;

因为 $\frac{1}{x} + y = \frac{1}{\log_2 3} + \log_3 4 = \log_3 2 + \log_3 4 = \log_3 8 < \log_3 9 = 2$, 所以 $\frac{1}{x} + y < 2$, 所以 C 错误;

因 $x + y = \log_2 3 + \log_3 4 = \log_2 3 + 2 \log_3 2 = \log_2 3 + \frac{2}{\log_2 3} > 2\sqrt{\log_2 3 \cdot \frac{2}{\log_2 3}} = 2\sqrt{2}$, 所以 D 正确.

11. 已知长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 在球 O 的内部, 球心 O 在平面 $ABCD$ 上, 若球的半径为 $\sqrt{3}$,

$AB = BC$, 则该长方体体积的最大值是

- A. 4 B. 8 C. 12 D. 18

【答案】选 A

【解析】设长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的高为 h , 设 $AB = a$, 则 $BD = \sqrt{2}a$, 所以 $\frac{BD}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$. 由勾股定理

得 $h^2 + \left(\frac{BD}{2}\right)^2 = \sqrt{3}^2 = 3$ 即 $h^2 + \frac{a^2}{2} = 3$ 得 $a^2 = 6 - 2h^2$,

所以长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 $V = a^2 h = (6 - 2h^2)h = -2h^3 + 6h$,

设 $f(h) = -2h^3 + 6h$, 其中 $0 < h < \sqrt{3}$, 则 $f'(h) = -6h^2 + 6$, 令 $f'(h) = 0$, 得 $h = 1$,

当 $0 < h < 1$ 时, $f'(h) > 0$, $f(h)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增; 当 $1 < h < \sqrt{3}$ 时, $f'(h) < 0$, $f(h)$ 在 $(1, \sqrt{3})$ 上

单调递减. 所以函数 $V = f(h)$ 在 $h = 1$ 处取得极大值, 亦即最大值, 则 $V_{\max} = f(1) = 4$.

因此该长方体的体积的最大值为 4.

12. 曲线 C 是平面内与三个定点 $F_1(-1, 0), F_2(1, 0)$ 和 $F_3(0, 1)$ 的距离的和等于 $2\sqrt{2}$ 的点的轨迹. 给出下列四

个结论:

① 曲线 C 关于 x 轴、 y 轴均对称;

② 曲线 C 上存在点 P , 使得 $|PF_3| = \frac{2\sqrt{2}}{3}$;

③ 若点 P 在曲线 C 上, 则 $\triangle F_1PF_2$ 的面积最大值是 1;

④ 曲线 C 上存在点 P , 使得 $\angle F_1PF_2$ 为钝角.

其中所有正确结论的序号是 ()

- A. ②③④ B. ②③ C. ③④ D. ①②③④

【答案】C ③④

【分析】①由已知表示出 C 的方程，观察方程的对称性可以判断结果；②假设结论成立，推理出曲线不存在，不合题意；③点 P 在椭圆上顶点时，满足题意，且面积最大；④寻找曲线 C 上的一个特殊点，验证 $\angle F_1PF_2$ 为钝角.

【详解】设曲线 C 上任意一点 $P(x, y)$ ，由题意可知 C 的方程为

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2}+\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-1)^2}=2\sqrt{2}.$$

①错误，在此方程中用 $-x$ 取代 x ，方程不变，可知 C 关于 y 轴对称；同理用 $-y$ 取代 y ，方程改变，可知 C 不关于 x 轴对称，故①错误.

②错误，若 $|PF_3|=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ，则 $|PF_1|+|PF_2|=\frac{4\sqrt{2}}{3}<|F_1F_2|=2$ ，曲线 C 不存在，故②错误.

③正确， $|PF_1|+|PF_2|\leq|PF_1|+|PF_2|+|PF_3|=2\sqrt{2}$ ， P 应该在椭圆 $D: \frac{x^2}{2}+y^2=1$ 内(含边界)，曲线 C 与椭圆 D 有唯一的公共点 $F_3(0,1)$ ，此时 $|F_1F_2|=2$ ， $|OF_3|=1$ ，当点 P 为 F_3 点时， $\triangle F_1PF_2$ 的面积最大，最大值是 1；故

③正确

④正确，由③可知，取曲线 C 上点 $F_3(0,1)$ ，此时 $\angle F_1F_3F_2=90^\circ$ ，下面在曲线 C 上再寻找一个特殊点

$P(0, y)$ ， $0 < y < 1$ ，则 $2\sqrt{1+y^2}+1-y=2\sqrt{2}$ ，

把 $2\sqrt{1+y^2}=2\sqrt{2}-1+y$ 两边平方，整理得 $3y^2+(2-4\sqrt{2})y+4\sqrt{2}-5=0$ ，

解得 $y=\frac{4\sqrt{2}-2\pm(8-4\sqrt{2})}{6}$ ，即 $y=1$ 或 $\frac{4\sqrt{2}-5}{3}$ 。

因为 $0 < \frac{4\sqrt{2}-5}{3} < 1$ ，则取点 $P\left(0, \frac{4\sqrt{2}-5}{3}\right)$ ，此时 $\angle F_1PF_2 > 90^\circ$ ，故④正确.

故答案为：③④.

【点睛】易错点睛：与椭圆相关的综合问题，难度大，要注意：

(1)注意观察方程的特征，利用代数方法判断曲线 C 的对称性；

(2)适当利用反向推理，假设成立，再反向推理看是否合理；

(3)椭圆焦点三角中，当点在椭圆上下顶点时，焦点三角形面积最大，椭圆上点与两个焦点的张角最大；

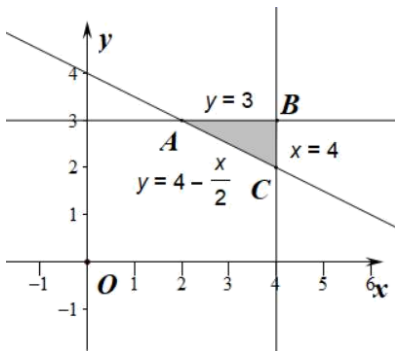
(3)验证存在性的问题，只需找到一个正例就可以说明其存在性；验证某个结论错误时，只需一个反例即可说明.

13. 若 x 、 y 满足约束条件 $\begin{cases} x+2y \geq 8 \\ 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 3 \end{cases}$ ，则 $z=x+y$ 的最大值为_____.

【答案】7

【解析】由题意可知，约束条件为 $\begin{cases} x+2y \geq 8 \\ 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 3 \end{cases}$ ，

根据约束条件可绘出可行域：



当目标函数经过点 $B(4,3)$ 时取最大值， $z_{\max} = 4 + 3 = 7$.

14. 设 $f(x) = \frac{1}{x} + \log_2 \frac{2}{x}$ ，则不等式 $f(\frac{1}{x}-1) > \frac{1}{2}$ 的解集为_____.

【答案】 $(\frac{1}{3}, 1)$

【解析】由题意，函数 $f(x) = \frac{1}{x} + \log_2 \frac{2}{x}$ ，根据初等函数的性质，可得函数 $f(x)$ 在定义域 $(0, +\infty)$ 为单调递减函数，且 $f(2) = \frac{1}{2}$ ，则不等式 $f(\frac{1}{x}-1) > \frac{1}{2}$ 等价于 $0 < \frac{1}{x}-1 < 2$ ，解得 $\frac{1}{3} < x < 1$ ，所以不等式的解集为 $(\frac{1}{3}, 1)$.

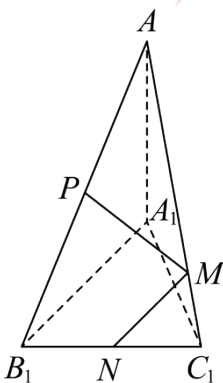
15. 已知 $\sin(\frac{\pi}{6} + \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{3}$ ，则 $\cos(2\alpha + \frac{4\pi}{3})$ 的值为_____.

【答案】 $-\frac{5}{9}$

【分析】利用倍角公式和诱导公式求解即可.

【详解】 $\cos(2\alpha + \frac{4\pi}{3}) = \cos(2\alpha + \frac{\pi}{3} + \pi) = -\cos(2\alpha + \frac{\pi}{3})$
 $= 2\sin^2(\alpha + \frac{\pi}{6}) - 1 = -\frac{5}{9}$

16. 如图，在三棱锥 $A-A_1B_1C_1$ 中， $AA_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$ ， $\angle A_1B_1C_1 = 90^\circ$ ， $A_1B_1 = 2A_1A = 2B_1C_1 = 2$ ， P 为线段 AB_1 的中点， M, N 分别为线段 AC_1 和线段 B_1C_1 上任意一点，则 $\sqrt{5}PM + MN$ 的最小值为_____.



【答案】 $\sqrt{5}$

【分析】先利用线面垂直的判定定理推得 $B_1C_1 \perp AB_1$ ，再利用面积相等在 $\text{Rt}\triangle AB_1C_1$ 中推得

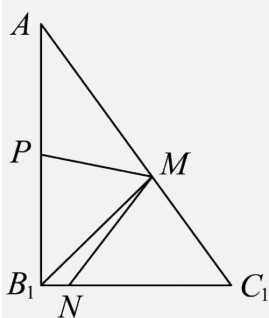
$\sqrt{5}PM\sin\angle MPA + MN\sin\angle MNC_1 = \sqrt{5}$ ，从而得到 $\sqrt{5} \leq \sqrt{5}PM + MN$ ，由此得解.

【详解】因为 $AA_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$ ， $A_1B_1, B_1C_1 \subset$ 面 $A_1B_1C_1$ ，所以 $AA_1 \perp B_1C_1, AA_1 \perp A_1B_1$ ，

又 $\angle A_1B_1C_1 = 90^\circ$ ， $B_1C_1 \perp A_1B_1$ ，

因为 $AA_1 \cap A_1B_1 = A_1$ ， $AA_1, A_1B_1 \subset$ 平面 AA_1B_1 ，所以 $B_1C_1 \perp$ 平面 AA_1B_1 ，

又 $AB_1 \subset$ 平面 AA_1B_1 ，所以 $B_1C_1 \perp AB_1$ ，



又在 $\text{Rt}\triangle AA_1B_1$ 中， $AB_1 = \sqrt{AA_1^2 + A_1B_1^2} = \sqrt{5}$ ，

在 $\text{Rt}\triangle AB_1C_1$ 中， $S_{\triangle AB_1M} + S_{\triangle B_1MC_1} = S_{\triangle AB_1C_1}$ ，

故 $\frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times PM\sin\angle MPB_1 + \frac{1}{2} \times 1 \times MN\sin\angle MNC_1 = \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{5}$ ，

则 $\sqrt{5}PM\sin\angle MPB_1 + MN\sin\angle MNC_1 = \sqrt{5}$ ，

又 $\sqrt{5}PM\sin\angle MPB_1 \leq \sqrt{5}PM, MN\sin\angle MNC_1 \leq MN$ ，

所以 $\sqrt{5}PM\sin\angle MPB_1 + MN\sin\angle MNC_1 \leq \sqrt{5}PM + MN$ ，

即 $\sqrt{5} \leq \sqrt{5}PM + MN$ ，当且仅当 $\angle MPB_1 = 90^\circ, \angle MNC_1 = 90^\circ$ 时，等号成立，

当 $\angle MPB_1 = 90^\circ$ 时， M 为 AC_1 的中点，此时当 $\angle MNC_1 = 90^\circ$ 时， N 为 B_1C_1 的中点，

综上所述 $\sqrt{5}PM + MN$ 的最小值是 $\sqrt{5}$ 。

【点睛】关键点睛：本题的突破口是如何解决 PM, MN 的系数问题，利用三角形面积公式与面积相等得到 $\sqrt{5}PM\sin\angle MPA + MN\sin\angle MNC_1 = \sqrt{5}$ 即可得解。

17. 某学校研究性学习小组在学习生物遗传学的过程中，为验证高尔顿提出的关于儿子成年后身高 y （单位：cm）与父亲身高 x （单位：cm）之间的关系及存在的遗传规律，随机抽取了 5 对父子的身高数据，如下表：

父亲身高 x	160	170	175	185	190
儿子身高 y	170	174	175	180	186

参考数据及公式： $\sum_{i=1}^5 x_i = 880$ ， $\sum_{i=1}^5 x_i^2 = 155450$ ， $\sum_{i=1}^5 y_i = 885$ ， $\sum_{i=1}^5 x_i y_i = 156045$ ， $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$ ，

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$$

- (1)根据表中数据，求出 y 关于 x 的线性回归方程；
 (2)小明的父亲身高 178cm，请你利用回归直线方程预测小明成年后的身高。

【答案】(1) $\hat{y} = 0.5x + 89$ ，规律见解析

(2)178cm

【详解】(1) $\bar{x} = \frac{1}{5} \times \sum_{i=1}^5 x_i = \frac{1}{5} \times 880 = 176$ ， $\bar{y} = \frac{1}{5} \times \sum_{i=1}^5 y_i = \frac{1}{5} \times 885 = 177$ 2分

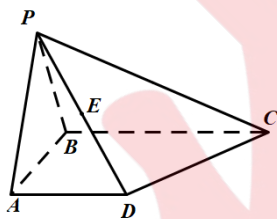
$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i y_i - 5\bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum_{i=1}^5 x_i^2 - 5\bar{x}^2} = \frac{156045 - 5 \times 176 \times 177}{155450 - 5 \times 176^2} = 0.5, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 177 - 0.5 \times 176 = 89, \dots\dots\dots 5分$$

故回归方程为： $\hat{y} = 0.5x + 89$ ，7分

(2) 当 $x = 178$ 时， $\hat{y} = 0.5 \times 178 + 89 = 178cm$ 10分

\therefore 预测小明成年后的身高为178cm12分

18. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为直角梯形， $AB \perp AD$ ， $AD \parallel BC$ ，侧面 $PAB \perp$ 面 $ABCD$ ， $PA = AB = AD = 2$ ， $BC = 4$ ， E 为 PD 的中点.



- (1)求证：面 $PBC \perp$ 面 PAB ；
 (2)若二面角 $\angle PAB$ 的大小为 60° ，求四棱锥 $E-ABCD$ 的体积.

【答案】(1)证明见解析 (2) $\sqrt{3}$

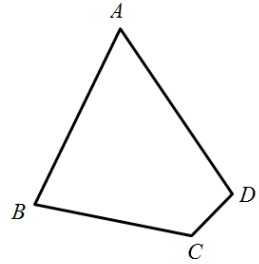
【详解】(1) \because 侧面 $PAB \perp$ 面 $ABCD$ ， $AB \perp BC$ ，面 $PAB \cap$ 面 $ABCD = AB$
 $\therefore BC \perp$ 面 PAB

\therefore 面 $PBC \perp$ 面 PAB ；6分

(2) $V_{E-ABCD} = \frac{1}{2} V_{P-ABCD} = \sqrt{3}$ 12分

19. (本小题满分 12 分) 为加强学生劳动教育，成都石室中学北湖校区将一块四边形园地 $ABCD$ 用于蔬菜种植实践活动. 经测量，边界 AB 与 AD 的长度都是 14 米， $\angle BAD = 60^\circ$ ， $\angle BCD = 120^\circ$.

- (1)若 DC 的长为 6 米，求 BC 的长；
 (2)现需要沿实验园的边界修建篱笆以提醒同学们不要随意进入，问所需要篱笆的最大长度为多少米



【解析】(1)连接 BD ，由题意 $\triangle ABD$ 是等边三角形，所以 $BD=14$ ，
 在 $\triangle BCD$ 中，由余弦定理得， $|BD|^2 = |BC|^2 + |CD|^2 - 2|BC| \cdot |CD| \cos \angle BCD$

即 $|BC|^2 + 6|BC| - 160 = 0$ ，求解得 $|BC| = 10$ (舍去 $|BC| = -16$)

故 BC 的长为 10 米。.....5 分

(2)设 $\angle BDC = \theta$ ， $\angle CBD = \frac{\pi}{3} - \theta$ ，

在 $\triangle BCD$ 中， $\frac{CD}{\sin \angle CBD} = \frac{BC}{\sin \angle BDC} = \frac{BD}{\sin \angle C} = \frac{14}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{28}{\sqrt{3}}$ ，

所需篱笆的长度为 $f(\theta) = 28 + \frac{28\sqrt{3}}{3} \left(\sin \theta + \sin \left(\frac{\pi}{3} - \theta \right) \right)$
 $= 28 + \frac{28\sqrt{3}}{3} \left(\sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta - \frac{1}{2} \sin \theta \right) = 28 + \frac{28\sqrt{3}}{3} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \leq 28 + \frac{28\sqrt{3}}{3}$10 分

则当 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 时，所需篱笆的最大长为 $28 + \frac{28\sqrt{3}}{3}$ 米12 分

20. (本小题满分 12 分) 已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$ ，抛物线 $C_2: y^2 = 4x$ 在第一象限与椭圆 C_1 交于点 A ，点 F 为抛物线 C_2 的焦点，且满足 $|AF| = \frac{5}{3}$ 。

- (1)求椭圆 C_1 的方程；
 (2)设直线 $x = my + 1$ 与椭圆 C_1 交于 P, Q 两点，过 P, Q 分别作直线 $l: x = t (t > 2)$ 的垂线，垂足为 M, N ， l 与 x 轴的交点为 T 。若 $\triangle PMT$ 、 $\triangle PQT$ 、 $\triangle QNT$ 的面积成等差数列，求实数 m 的取值范围。

【解析】(1)由题意， $|AF| = x_M + 1 = \frac{5}{3}$ ，则点 $A \left(\frac{2}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{3} \right)$ 在椭圆上，

得 $\frac{4}{9a^2} + \frac{8}{3b^2} = 1$ ，① $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{1}{4}$ 即 $3a^2 = 4b^2$ ②

联立①②，解得 $a^2=4, b^2=3, \therefore$ 椭圆 C_1 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ ；4分

(2)依题意，直线 PQ 与 x 轴不重合，故可设直线 PQ 的方程为 $x=my+1$.

$$\text{联立} \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \\ x = my + 1 \end{cases}, \text{ 消去 } x: (3m^2 + 4)y^2 + 6my - 9 = 0.$$

设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ ，则有 $\Delta > 0$ ，且 $y_1 + y_2 = -\frac{6m}{3m^2 + 4}, y_1 y_2 = -\frac{9}{3m^2 + 4}$. 7分

设 $\triangle PMT, \triangle PQT, \triangle QNT$ 的面积分别为 S_1, S_2, S_3 ,

$\therefore S_1, S_2, S_3$ 成等差数列， $\therefore 2S_2 = S_1 + S_3$ ，即 $3S_2 = S_1 + S_2 + S_3$,

$$\text{则 } 3 \times \frac{1}{2}(t-1) \times |y_1 - y_2| = \frac{1}{2} [(t-x_1) + (t-x_2)] \times |y_1 - y_2|;$$

即 $3(t-1) = 2t - (x_1 + x_2)$ ，得 $t = 3 - (x_1 + x_2)$ ，9分

又 $x_1 = my_1 + 1, x_2 = my_2 + 1$,

于是， $t = 3 - (my_1 + my_2 + 2) = 1 - m(y_1 + y_2)$ ， $\therefore t = 1 + \frac{6m^2}{3m^2 + 4} > 2$ ，解得 $m^2 > \frac{4}{3}$.

21. (本小题满分 12 分) 已知函数 $f(x) = x - \frac{1}{x} - m \ln x - m$ ，其中 e 是自然对数的底数.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $m=1$ ，设关于 x 的不等式 $f(x) \leq x \ln x - \frac{1}{x} - kx + n$ 对 $\forall x \in [1, e]$ 恒成立时 k 的最大值为

$c(k \in \mathbf{R}, n \in [1, e])$ ，求 c 的取值范围.

【解析】(1) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ ， $f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{m}{x} = \frac{x^2 - mx + 1}{x^2}$ ， 1分

当 $m \leq 2$ 时， $f'(x) \geq 0, x \in (0, +\infty), f(x)$ 单调递增;

当 $m > 2$ 时， $f'(x) = \frac{x^2 - mx + 1}{x^2} = 0, x_1 = \frac{m - \sqrt{m^2 - 4}}{2}, x_2 = \frac{m + \sqrt{m^2 - 4}}{2}$,

$f'(x) > 0, x \in (0, x_1), (x_2, +\infty), f(x)$ 单调递增; $f'(x) < 0, x \in (x_1, x_2), f(x)$ 单调递减; 4分

综上，当 $m \leq 2$ 时， $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增;

当 $m > 2$ 时， $f(x)$ 在 $(0, \frac{m - \sqrt{m^2 - 4}}{2}), (\frac{m + \sqrt{m^2 - 4}}{2}, +\infty)$ 单调递增，在 $(\frac{m - \sqrt{m^2 - 4}}{2}, \frac{m + \sqrt{m^2 - 4}}{2})$ 单调递

减.....5分

(2) 因为 x 的不等式 $f(x) \leq x \ln x - \frac{1}{x} - kx + n$ 对 $\forall x \in [1, e]$ 恒成立，

则 $k \leq \frac{(1 + \ln x) - x + x \ln x + n}{x}$ ，对 $\forall x \in [1, e]$ 恒成立，.....6分

令 $g(x) = \frac{1 + \ln x - x + x \ln x + n}{x}$,

即 $g'(x) = \frac{-\ln x + x - n}{x^2}$ ，令 $p(x) = -\ln x + x - n$ ，即 $p'(x) = -\frac{1}{x} + 1 > 0$ ，

所以 $p(x)$ 在 $x \in [1, e]$ 上递增；.....7分

①当 $p(1) \geq 0$ ，即 $n \leq 1$ 时，因为 $n \in [1, e]$ ，所以 $n = 1$ ，

当 $x \in [1, e]$ ， $p(x) \geq 0$ ，即 $g'(x) \geq 0$ ，所以 $g(x)$ 在 $[1, e]$ 上递增，

所以 $c = g(x)_{\min} = g(1) = n = 1$ ；.....8分

②当 $p(e) \leq 0$ 即 $n \in [e-1, e]$ 时，因为 $x \in [1, e]$ ， $p(x) \leq 0$ ，即 $g'(x) \leq 0$ ，

所以 $g(x)$ 在 $[1, e]$ 上递减，所以 $c = g(x)_{\min} = g(e) = \frac{n+2}{e} \in \left[\frac{e+1}{e}, \frac{e+2}{e} \right]$ ；9分

③当 $p(1)p(e) < 0$ ，即 $n \in (1, e-1)$ 时，因为 $p(x) = -\ln x + x - n$ 在 $[1, e]$ 上递增，

所以存在唯一实数 $x_0 \in (1, e)$ ，使得 $p(x_0) = 0$ ，即 $n = x_0 - \ln x_0$ ，

则当 $x \in (1, x_0)$ 时， $p(x) < 0$ ，即 $g'(x) < 0$ ；当 $x \in (x_0, e)$ 时， $p(x) > 0$ ，即 $g'(x) > 0$ ，

故 $g(x)$ 在 $(1, x_0)$ 上单减， (x_0, e) 上单增，所以 $c = g(x)_{\min} = g(x_0) = \frac{1 + \ln x_0 - x_0 + x_0 \ln x_0 + n}{x_0} = \ln x_0 + \frac{1}{x_0}$ ，

设 $u(x) = \ln x + \frac{1}{x}$ ($x \in (1, e)$)，则 $u'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2} > 0$ ，

所以 $u(x)$ 在 $(1, e)$ 上递增，所以 $c \in \left(1, 1 + \frac{1}{e} \right)$ 。

综上所述， $c \in \left[1, \frac{2}{e} + 1 \right]$ 。.....12分

22. [选修 4-4：坐标系与参数方程]

已知圆 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = -1 + 4\cos\beta \\ y = 1 + 4\sin\beta \end{cases}$ (β 为参数)，以坐标原点为极点， x 轴非负半轴为极轴建立极坐标系。

坐标系。

(1)求圆 C 的极坐标方程；

(2)若直线 l 的参数方程是 $\begin{cases} x = t\cos\alpha \\ y = t\sin\alpha \end{cases}$ (t 为参数， α 为直线 l 的倾斜角)， l 与 C 交于 A, B 两点，

$|AB| = 2\sqrt{14}$ ，求 l 的斜率。

【解析】(1)圆 C 的直角方程为 $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 16$ 将 $x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta, x^2 + y^2 = \rho^2$

得 $\rho^2 + 2\rho(\cos\theta - \sin\theta) - 14 = 0$ 。

故圆 C 的极坐标方程为 $\rho^2 + 2\rho(\cos\theta - \sin\theta) - 14 = 0$4分

(2)在极坐标系中，直线 l 的极坐标方程为 $\theta = \alpha (\rho \in \mathbb{R})$,

设 A, B 所对应的极径分别为 ρ_1, ρ_2 .

将 l 的极坐标方程代入 C 的极坐标方程得 $\rho^2 + 2\rho(\cos\theta - \sin\theta) - 14 = 0$.

于是 $\rho_1 + \rho_2 = \sin\alpha - \cos\alpha, \rho_1\rho_2 = -14$

$$|AB| = |\rho_1 - \rho_2| = \sqrt{(\rho_1 + \rho_2)^2 - 4\rho_1\rho_2} = \sqrt{57 - \sin 2\alpha} = 2\sqrt{14}$$

得 $\sin 2\alpha = 1, 2\alpha = \frac{\pi}{2}, \alpha = \frac{\pi}{4}$ 所以 l 的斜率为 1.10 分

23. 已知函数 $f(x) = |x-2|$.

(1)求不等式 $f(x) \geq 2x-5$ 的解集;

(2)若 $f(x) \geq 3-|x+a|$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

【答案】 (1) $(-\infty, 3]$

(2) $(-\infty, -5] \cup [1, +\infty)$.

【分析】 (1) 绝对值不等式分类讨论求解即可得;

(2) 双绝对值不等式恒成立问题, 借助绝对值三角不等式, 将原问题转化即可得.

【详解】 (1) $f(x) \geq 2x-5$ 等价于 $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x-2 \geq 2x-5 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x-2 < 0 \\ -(x-2) \geq 2x-5 \end{cases}$,

解得 $2 \leq x \leq 3$ 或 $x < 2$,

即 $x \leq 3$, 即不等式 $f(x) \geq 2x-5$ 的解集为 $(-\infty, 3]$;5 分

(2) $f(x) \geq 3-|x+a|$ 恒成立, 即 $|x-2|+|x+a| \geq 3$ 恒成立,

因为 $|x-2|+|x+a| \geq |x-2-(x+a)| = |2+a|$,

所以 $|2+a| \geq 3$, 解得 $a \geq 1$ 或 $a \leq -5$,

即 a 的取值范围是 $(-\infty, -5] \cup [1, +\infty)$ 10 分