秘密 ★ 启用前

资阳市高中2021级第二次诊断性考试

数　学(理科)

本试卷满分150分,考试时间120分钟。

注意事项:

1.答卷前,考生务必将自己的姓名、座位号和准考证号填写在答题卡上。

2.回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3.考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

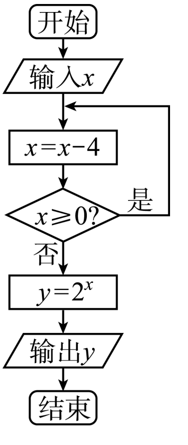
1.已知集合 $A=\{x\mid -3<x<2\}$,$B=\{x\mid x^2+4x-5\leqslant 0\}$,则 $A\cap B=$

A. $\varnothing$　　B. $(-3,1]$　　C. $[-1,2)$　　D. $(-3,2)$

2.复数 $z=\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}+\mathrm{i}$,则 $|z|=$

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. 2　　D. 4

3.执行如图所示的程序框图,若输入的 x 值为2023,则输出的 y 值为



A. $\dfrac{1}{16}$

B. $\dfrac{1}{8}$

C. $\dfrac{1}{4}$

D. $\dfrac{1}{2}$

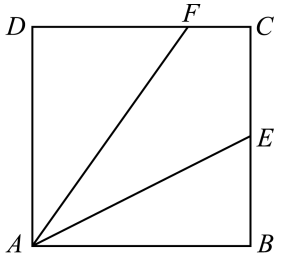
4.甲、乙两个口袋中均装有1个黑球和2个白球,现分别从甲、乙两口袋中随机取一个球交换放入另一口袋,则甲口袋的三个球中恰有两个白球的概率为

A. $\dfrac{2}{3}$　　B. $\dfrac{5}{9}$　　C. $\dfrac{4}{9}$　　D. $\dfrac{1}{3}$

5.已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列,数列 $\{b_n\}$ 是等比数列,若 $a_1+a_5+a_9=9$,$b_2b_5b_8=3\sqrt{3}$,则 $\dfrac{a_2+a_8}{1+b_2b_8}=$

A. 2　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\dfrac{3}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

6. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 4，E 为 BC 的中点，F 为 CD 边上一点，若 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AE}=|\overrightarrow{AE}|^2$，则 $|AF|=$



A. $\sqrt{17}$　　B. $2\sqrt{5}$

C. $2\sqrt{6}$　　D. 5

7. “$\varphi=-\frac{\pi}{6}$”是“函数 $y=\sin(2x-\varphi)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 对称”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

8. 已知 F_1,F_2 为双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，点 A 在 C 上，若 $|F_1A|=2|F_2A|$，$\angle AF_1F_2=30^\circ$，$\triangle AF_1F_2$ 的面积为 $6\sqrt{3}$，则 C 的方程为

A. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{6}=1$　　B. $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{6}=1$　　C. $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{9}=1$　　D. $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1$

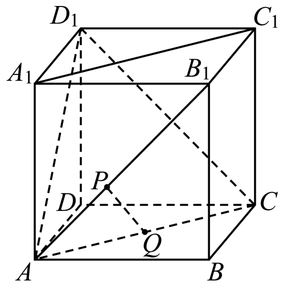
9. 甲、乙、丙、丁 4 个学校将分别组织部分学生开展研学活动，现有 A,B,C,D,E 五个研学基地供选择，每个学校只选择一个基地，则 4 个学校中至少有 3 个学校所选研学基地不相同的选择种数共有

A. 420　　B. 460　　C. 480　　D. 520

10. 若点 P 是函数 $f(x)=\frac{2\sqrt{3}\cos x}{\sin x+\cos x}$ 图象上任意一点，直线 l 为点 P 处的切线，则直线 l 倾斜角的取值范围是

A. $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$　　B. $\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$　　C. $\left(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right]$　　D. $\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right)$

11. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P 是线段 AB_1 上的动点(含端点)，点 Q 是线段 AC 的中点，设 PQ 与平面 ACD_1 所成角为 θ，则 $\cos\theta$ 的最小值是



A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$　　D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

12. 已知 O 为坐标原点，F_1,F_2 是椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，A,B 分别为 C 的左、右顶点. P 为 C 上一点，且 $PF_2\perp x$ 轴，直线 AP 与 y 轴交于点 M，直线 BM 与 PF_2 交于点 Q，直线 F_1Q 与 y 轴交于点 N. 若 $|ON|=\frac{1}{4}|OM|$，则 C 的离心率为

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{3}{4}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知实数 x,y 满足 $\begin{cases} y\leqslant 4-x, \\ y+2\geqslant 0, \\ y\leqslant x+2, \end{cases}$ 则 $2x+3y$ 的最大值为______.

14. 写出一个同时具有下列性质①②③的函数：______.

①偶函数；②最大值为 2；③最小正周期是 π.

15. 在正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 内有一个球与该四棱台的每个面都相切（称为该四棱台的内切球），若 $A_1B_1=2$，$AB=4$，则该四棱台的外接球（四棱台的顶点都在球面上）与内切球的半径之比为______.

16. 若点 P 为 $\triangle ABC$ 的重心，$35\sin A\cdot\overrightarrow{PA}+21\sin B\cdot\overrightarrow{PB}+15\sin C\cdot\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$，则 $\cos\angle BAC=$______.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生依据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.（12 分）

某工厂注重生产工艺创新，设计并试运行了甲、乙两条生产线.现对这两条生产线生产的产品进行评估，在这两条生产线所生产的产品中，随机抽取了 300 件进行测评，并将测评结果（“优”或“良”）制成如下所示列联表：

	良	优	合计
甲生产线	40	80	120
乙生产线	80	100	180
合计	120	180	300

（1）通过计算判断，是否有 90％的把握认为产品质量与生产线有关系？

（2）现对产品进行进一步分析，在测评结果为“良”的产品中按生产线用分层抽样的方法抽取了 6 件产品.若在这 6 件产品中随机抽取 3 件，求这 3 件产品中产自于甲生产线的件数 X 的分布列和数学期望.

附表及公式：

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635

其中 $K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$.

18.（12 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 与正项等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_n=\log_2 b_n(n\in\mathbf{N}^*)$，且______.

（1）求 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $c_n=a_n\cdot b_n$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

从① $b_3=16$，$b_6=128$；② $b_1=4$，$b_5-b_1b_3=0$ 这两个条件中任选一个，补充在上面问题中并作答.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

19.(12 分)

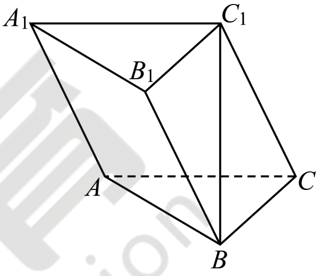
已知 O 为坐标原点,过点 $P(2,0)$ 的动直线 l 与抛物线 $C:y^2=4x$ 相交于 A,B 两点.

(1)求 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$;

(2)在平面直角坐标系 xOy 中,是否存在不同于点 P 的定点 Q,使得 $\angle AQP=\angle BQP$ 恒成立?若存在,求出点 Q 的坐标;若不存在,请说明理由.

20.(12 分)

如图,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,直线 $C_1B\perp$ 平面 ABC,平面 $AA_1C_1C\perp$ 平面 BB_1C_1C.



(1)求证:$AC\perp BB_1$;

(2)若 $AC=BC=BC_1=2$,在棱 A_1B_1 上是否存在一点 P,使二面角 $P-BC-C_1$ 的余弦值为 $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$?若存在,求 $\dfrac{B_1P}{A_1B_1}$ 的值;若不存在,请说明理由.

21.(12 分)

已知函数 $f(x)=ax^3+2\sin x-x\cos x$(其中 a 为实数).

(1)若 $a=-\dfrac{1}{2}$,$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,证明:$f(x)\geqslant 0$;

(2)探究 $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上的极值点个数.

(二)选考题:共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答,如果多做,则按所做的第一题记分。

22.[选修 4—4:坐标系与参数方程](10 分)

在直角坐标系 xOy 中,已知曲线 $C:x^2+y^2=|x|+y$(其中 $y>0$),曲线 $C_1:\begin{cases}x=t\cos\alpha,\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$($t$ 为参数,$t>0$),曲线 $C_2:\begin{cases}x=-t\sin\alpha,\\ y=t\cos\alpha\end{cases}$$\left(t\text{ 为参数},t>0,0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$.以坐标原点 O 为极点,x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系.

(1)求 C 的极坐标方程;

(2)若曲线 C 与 C_1,C_2 分别交于 A,B 两点,求 $\triangle OAB$ 面积的最大值.

23.[选修 4—5:不等式选讲](10 分)

设函数 $f(x)=|2x-2|+|x+2|$.

(1)解不等式 $f(x)\leqslant 5-2x$;

(2)令 $f(x)$ 的最小值为 T,正数 a,b 满足 $a^2+b^2+2b=T$,证明:$a+b\leqslant 2\sqrt{2}-1$.

理科数学参考解答及评分参考

一、选择题

1.【考查意图】本小题设置数学课程学习情境，设计集合运算问题，主要考查一元二次不等式的解法，集合的交集运算等基础知识；考查运算求解能力，数学运算素养。

【答案】B

【解析】由 $B=\{x|x^2+4x-5\leqslant 0\}=\{x|-5\leqslant x\leqslant 1\}$，所以 $A\cap B=\{x|-3<x<2\}\cap\{x|-5\leqslant x\leqslant 1\}=\{x|-3<x\leqslant 1\}$.

2.【考查意图】本小题设置数学课程学习情境，设计复数运算问题，主要考查复数的除法、加法运算，复数模的概念等基础知识；考查运算求解能力。

【答案】C

【解析】由 $z=\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}+\mathrm{i}=\dfrac{(1+\mathrm{i})^2}{2}+\mathrm{i}=2\mathrm{i}$，所以 $|z|=|2\mathrm{i}|=2$.

3.【考查意图】本小题设置数学应用情境，设计程序框图问题，主要考查对程序框图以及循环结构的理解和应用等基础知识；考查读图能力和逻辑思维能力；考查逻辑推理素养。

【答案】D

【解析】运行程序，输入 $x=2023$，则 $x=2023-4=2019$，满足 $x\geqslant 0$；$x=2019-4=2015$，满足 $x\geqslant 0$；…；$x=3$，满足 $x\geqslant 0$；$x=-1$，不满足 $x\geqslant 0$，故输出的 $y=2^{-1}=\dfrac{1}{2}$.

4.【考查意图】本小题设置生活实践情境，主要考查独立事件同时发生的概率，考查分类与整合、统计与概率等数学思想；考查数学建模等数学核心素养。

【答案】B

【详解】依题意，甲口袋的三个球中恰有两个白球的概率为 $P=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{5}{9}$.

5.【考查意图】本小题设置数学课程学习情境，设计等差数列和等比数列问题，主要考查等差数列和等比数列的性质等基础知识；考查运算求解能力，推理论证能力。

【答案】C

【解析】由 $\{a_n\}$ 是等差数列，$a_1+a_5+a_9=3a_5=9$ 得 $a_5=3$，所以 $a_2+a_8=2a_5=6$，由 $b_2b_5b_8=b_5^3=3\sqrt{3}$ 得 $b_5=\sqrt{3}$，所以 $b_2b_8=3$，所以 $\dfrac{a_2+a_8}{1+b_2b_8}=\dfrac{6}{1+3}=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}$.

6.【考查意图】本小题设置数学课程学习情境，设计平面向量的几何运算问题，主要考查平面向量的相关知识，考查数形结合思想，考查的核心素养是数学运算、直观想象。

【答案】D

【解析】连接 EF，因为 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AE}=|\overrightarrow{AF}|\cdot|\overrightarrow{AE}|\cos\angle FAE=|\overrightarrow{AE}|^2$，所以 $|\overrightarrow{AF}|\cos\angle FAE=|\overrightarrow{AE}|$，所以 $EF\perp AE$，则 $\triangle ABE\backsim\triangle ECF$，因为 E 为 BC 的中点，所以 $CE=2$，$CF=1$，则 $DF=3$，在 $\mathrm{Rt}\triangle ADF$ 中，$AF=\sqrt{AD^2+DF^2}=5$.

7.【考查意图】本小题设置数学课程学习情境，设置逻辑用语问题，主要考查三角函数图象的对称性、充分条件与必要条件等基础知识；考查化归与转化能力、运算求解能力；考查数学运算核心素养。

【答案】A

【解析】若函数 $y=\sin(2x-\varphi)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 对称，则 $2\times\frac{\pi}{6}-\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，故“$\varphi=-\frac{\pi}{6}$”是“函数 $y=\sin(2x-\varphi)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 对称”的充分不必要条件.

8.【考查意图】本小题设置课程学习情境，设计求双曲线标准方程的问题，考查双曲线的定义，解三角形及三角形面积等基础知识，考查化归与转化的数学思想，考查逻辑推理与数学运算等数学素养。

【答案】B

【解析】设 $|F_1F_2|=2c$，由 $|F_1A|=2|F_2A|$，$|F_1A|-|F_2A|=2a$ 得 $|F_1A|=4a$，$|F_2A|=2a$，又因为 $\angle AF_1F_2=30^\circ$，所以 $\angle F_1F_2A=90^\circ$，$|F_1F_2|=2c=2\sqrt{3}a$，故 $\triangle AF_1F_2$ 的面积为 $\frac{1}{2}|F_1F_2|\cdot|F_2A|=2\sqrt{3}a^2=6\sqrt{3}$，即 $a^2=3$，$c^2=9$，$b^2=6$，故 C 的方程为 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{6}=1$.

9.【考查意图】本小题设置生活实践情境，主要考查分类加法和分步乘法原理等基础知识；考查统计与概率、分类与整合等数学思想；考查数学抽象、数学建模等数学核心素养。

【答案】C

【解析】依题意，共有两种情形：①恰有 2 个学校所选基地相同，不同方法数为 $C_4^2A_5^3=360$；②4 个学校所选研学基地都不相同的方法有 $A_5^4=120$，所以不同方法种数共有 $360+120=480$ 种.

10.【考查意图】本小题设置数学探究情境，设计三角函数图象性质问题，主要考查导数的几何意义，三角函数的值域等基础知识；考查逻辑思维能力，等价转化能力，运算求解能力；考查逻辑推理和数学运算素养。

【答案】C

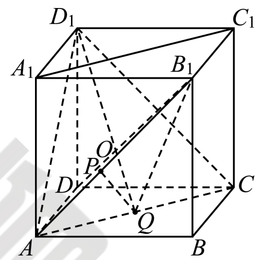
【解析】因为 $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，由 $x+\frac{\pi}{4}\neq k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\left\{x\,\middle|\,x\neq k\pi-\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$. 令直线 l 的倾斜角为 θ，

$$f'(x)=\frac{2\sqrt{3}[-\sin x(\sin x+\cos x)-\cos x(\cos x-\sin x)]}{(\sin x+\cos x)^2}=\frac{-2\sqrt{3}}{\left[\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]^2}=-\frac{\sqrt{3}}{\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}.$$

因为 $0<\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 1$，所以 $f'(x)\leqslant -\sqrt{3}$，即 $\tan\theta\leqslant -\sqrt{3}$. 又 $0\leqslant\theta<\pi$，所以 $\frac{\pi}{2}<\theta\leqslant\frac{2\pi}{3}$.

11.【考查意图】本小题设置课程学习情境，设计空间几何与代数的综合问题，主要考查正方体中直线与平面的位置关系、线面角的计算等基础知识与基本技能；考查数形结合、化归与转化等思想方法，考查逻辑推理、数学运算等数学素养。

【答案】A



【解析】如图，由正方体的性质，可得 $B_1D\perp$ 平面 AD_1C，且 B_1 在平面 AD_1C 上的射影 O 为 $\triangle AD_1C$ 的外心. 设正方体的棱长为 1，则 $\triangle AD_1C$ 的边长为 $\sqrt{2}$，$OQ=\frac{1}{3}QD_1=\frac{1}{3}\sqrt{2-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$，$B_1Q=\sqrt{1+\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，在 $\mathrm{Rt}\triangle OQB_1$ 中，$\cos\angle OQB_1=\frac{OQ}{B_1Q}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{6}}{\frac{\sqrt{6}}{2}}=\frac{1}{3}$. 结合图象可知，当 P 与点 B_1 重合时，$\cos\theta$ 取得最小值为 $\frac{1}{3}$.

12.【考查意图】本小题设置课程学习情境，设计与椭圆有关的综合问题，考查利用简单图形的几何性质求解点的坐标，线段长度等基础知识，考查化归转化、数形结合等思想方法，考查直观想象、数学运算等数学素养。

【答案】B

【解析】设 $|F_1F_2|=2c$，由题知，不妨设 $P\left(c,\frac{b^2}{a}\right)$，$|OM|=\frac{a}{a+c}|F_2P|=\frac{b^2}{a+c}$，$|F_2Q|=\frac{a-c}{a}|OM|=\frac{(a-c)b^2}{a(a+c)}$，$|ON|=\frac{1}{2}|F_2Q|=\frac{(a-c)b^2}{2a(a+c)}$，又因为 $|ON|=\frac{1}{4}|OM|$，所以 $|ON|=\frac{(a-c)b^2}{2a(a+c)}=\frac{b^2}{4(a+c)}$ 即 $a=2c$，则 $e=\frac{1}{2}$.

二、填空题

13.【考查意图】本小题设置数学课程学习情景，主要考查线性规划问题；查数形结合思想；考查直观想象、数学运算素养。

【答案】11

【解析】不等式组所表示的平面区域是连接 $A(-4,-2)$，$B(6,-2)$，$C(1,3)$ 三点所构成的三角形及内部区域，当 $z=2x+3y$ 所表示的直线过点 $C(1,3)$ 时，z 的值最大，最大值为 11.

14.【考查意图】本小题设置数学课程学习情境，设计函数性质问题，主要考查函数的奇偶性，最值，最小正周期等基础知识；考查直观想象能力，逻辑推理能力。

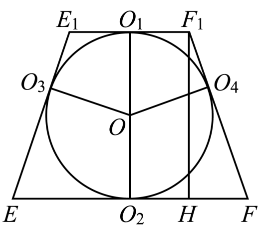
【答案】$f(x)=2\cos 2x$（答案不唯一，$f(x)=2|\sin x|$，$f(x)=2\sin^2 x$，$f(x)=|\sin x|+1$，$f(x)=\cos 2x+1$ 等均可）

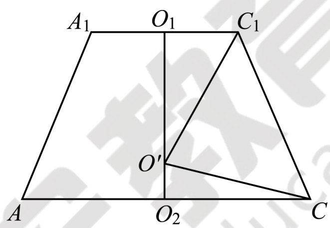
【解析】$f(x)=2\cos 2x$ 是偶函数，最大值为 2，且最小正周期为 π，满足 3 个性质.（答案不唯一，只要满足 3 个性质即可）

15.【考查意图】本小题设置数学课程学习情境，设计多面体的内切球与外接球的综合问题，主要考查正四棱台的底面与高、斜高等基础知识；考查数形结合、化归与转化等思想方法，考查直观想象、逻辑推理、数学运算等数学素养。

【答案】$\frac{\sqrt{65}}{4}$

【解析】如图，取内切球球心 O，球与上下底面的切点 O_1，O_2，球与左右侧面的切点 O_3，O_4 确定的截面 EFF_1E_1，易证 $O_1F_1=O_4F_1=1$，$O_2F=O_4F=2$，故 $F_1F=1+2=3$，从而四棱台的高 $h=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$，内切球半径 $r=\frac{1}{2}h=\sqrt{2}$.





另取截面 AA_1C_1C，外接球球心 O' 在 O_1O_2 上，且 $O'C_1=O'C$. 设 $O'O_1=t$，则 $t^2+\sqrt{2}^2=(2\sqrt{2}-t)^2+(2\sqrt{2})^2$，解之得 $t=\frac{7\sqrt{2}}{4}$，从而外接球半径 $R=\sqrt{t^2+(\sqrt{2})^2}=\frac{\sqrt{130}}{4}$，$R:r=\frac{\sqrt{65}}{4}$.

16.【考查意图】本小题设置数学探究情境，设计三角形重心问题，主要考查三角形重心性质探究，正弦定理，余弦定理，比例性质等基础知识；考查运算求解能力，推理论证能力；考查数形结合思想，逻辑推理素养，数学运算素养。

【答案】$\frac{13}{14}$

【解析】因为点 P 为 $\triangle ABC$ 的重心，所以 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$，由题设有 $35\sin A=21\sin B=15\sin C$，所以 $\sin A:\sin B:\sin C=3:5:7$，由正弦定理有 $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=3:5:7$，不妨设 $a=3t$，$b=5t$，$c=7t$，$t>0$，根据余弦定理 $\cos\angle BAC=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{25t^2+49t^2-9t^2}{2\times 5t\times 7t}=\frac{65}{70}=\frac{13}{14}$.

三、解答题

17.【考查意图】本小题考查独立性检验的基本思想及其初步应用、离散型随机变量分布列等基础知识；考查化归与转化、统计与概率等数学思想；考查数学运算、数据分析、数学建模等数学核心素养。

【解析】(1) 由题，$K^2=\frac{300\times(40\times 100-80\times 80)^2}{120\times 180\times 120\times 180}=\frac{100}{27}\approx 3.704>2.706$，……………… 4 分

因此，有 90% 的把握认为产品质量与生产线有关系. ………………………………………… 5 分

(2)6 件产品中产自于甲、乙生产线的分别有 2 件和 4 件，则 X 可能值为 0,1,2.

则 $P(X=0)=\frac{C_4^3}{C_6^3}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$；$P(X=1)=\frac{C_2^1C_4^2}{C_6^3}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$；$P(X=2)=\frac{C_2^2C_4^1}{C_6^3}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$.

则 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

………………………………………………………… 10 分

所以，$E(X)=0\times\frac{1}{5}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{1}{5}=1$. ………………………………………… 12 分

18.【考查意图】本小题设置数学课程学习情境，设计结构不良问题，主要考查等差数列和等比数列的通项公式，前 n 项和公式，错位相减求和等基础知识；考查运算求解能力，数据处理能力，推理论证能力；考查化归与转化思想，数学运算素养，逻辑推理素养。

【解析】(1)若选①，

因为数列$\{b_n\}$是正项等比数列，设公比为 q，所以 $b_6=b_3q^3$，

又 $b_3=16$，$b_6=128$，所以 $128=16q^3$，

解得 $q=2$， ………………………………………………………… 3 分

所以 $b_1=\frac{b_3}{q^2}=\frac{16}{4}=4$，所以 $b_n=b_1q^{n-1}=4\cdot 2^{n-1}=2^{n+1}$.

所以 $a_n=\log_2 b_n=n+1$.

故数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=n+1$，$\{b_n\}$的通项公式为 $b_n=2^{n+1}$. ………………………… 6 分

若选②，

由 $b_5-b_1b_3=0$，得 $b_5=b_1b_3$.

因为数列$\{b_n\}$是正项等比数列，设$\{b_n\}$的公比为 q，所以 $b_1q^4=b_1\cdot b_1q^2$，

因为 $b_1=4$，所以 $q^2=4$，又 $b_n>0$，所以 $q=2$， ………………………………………… 3 分

所以 $b_n=b_1q^{n-1}=4\cdot 2^{n-1}=2^{n+1}$，

所以 $a_n=\log_2 b_n=n+1$.

数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=n+1$，$\{b_n\}$的通项公式为 $b_n=2^{n+1}$. ………………………… 6 分

(2)$c_n=a_n\cdot b_n=(n+1)\cdot 2^{n+1}$，

所以 $S_n=2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+4\cdot 2^4+\cdots+(n+1)\cdot 2^{n+1}$， ………………………………… 7 分

$2S_n=2\cdot 2^3+3\cdot 2^4+\cdots+n\cdot 2^{n+1}+(n+1)\cdot 2^{n+2}$.

两式相减，得 $-S_n=2\cdot 2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{n+1}-(n+1)\cdot 2^{n+2}$， ………………………… 9 分

所以 $-S_n=2+(2^1+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{n+1})-(n+1)\cdot 2^{n+2}$

$=2+\dfrac{2(1-2^{n+1})}{1-2}-(n+1)\cdot 2^{n+2}=-n\cdot 2^{n+2}$.

故 $S_n=n\cdot 2^{n+2}$. …………………………………………………… 12 分

19.【考查意图】本小题设置课程学习情境,设计直线与抛物线的综合问题,主要考查直线与抛物线的交点坐标、抛物线的对称性等基础知识,考查特殊与一般、化归与转化等数学思想,考查类比推理及数学运算素养。

【解析】

(1)由题知,直线 l 与 y 轴不垂直,

故可设直线 l 的方程为 $x=my+2$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$.

由 $\begin{cases} y^2=4x, \\ x=my+2 \end{cases}$ 得 $y^2-4my-8=0$. …………………………………… 2 分

显然,$\Delta=16m^2+32>0$,

于是 $y_1+y_2=4m$,$y_1y_2=-8$,$x_1x_2=\dfrac{1}{16}y_1^2y_2^2=4$. …………………………… 4 分

所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=-4$. …………………………………… 5 分

(2)当直线 $l\perp x$ 轴时,l:$x=2$,$A(2,2\sqrt{2})$,$B(2,-2\sqrt{2})$,

故当$\angle AQP=\angle BQP$ 时,点 $Q\in x$ 轴. …………………………………………… 6 分

当直线 l 与 x 轴不垂直时,由抛物线的对称性知,满足条件的点 $Q\in x$ 轴,设 $Q(n,0)$,

由$\angle AQP=\angle BQP$ 得 $k_{AQ}+k_{BQ}=0$,即$\dfrac{y_1}{x_1-n}+\dfrac{y_2}{x_2-n}=0$, ………………………… 8 分

整理得 $y_1(x_2-n)+y_2(x_1-n)=0$,即

$y_1(my_2+2-n)+y_2(my_1+2-n)=0$,

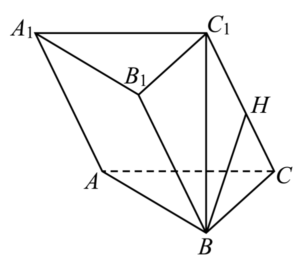
所以 $2my_1y_2+(2-n)(y_1+y_2)=0$. ………………………………………… 10 分

故$-16m+4(2-n)m=0$,解得 $n=-2$.

综上,存在定点 $Q(-2,0)$满足条件. …………………………………………… 12 分

20.【考查意图】本小题设置数学课程学习情境,设计斜棱柱相关的综合问题,主要考查直线与平面垂直的判定及性质,平面与平面垂直的性质,空间向量的应用等基础知识;考查数形结合、化归与转化等思想方法,考查直观想象、逻辑推理、数学运算等数学素养。

【解析】(1)在平面 BB_1C_1C 中作 $BH\perp CC_1$ 于 H,



因为平面 $AA_1C_1C\perp$平面 BB_1C_1C,

且平面 $AA_1C_1C\cap$平面 $BB_1C_1C=CC_1$,

所以 $BH\perp$平面 AA_1C_1C,从而 $AC\perp BH$. ………………… 2 分

在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$C_1B\perp$平面 ABC,$AC\subset$平面 ABC,

所以 $AC\perp C_1B$.

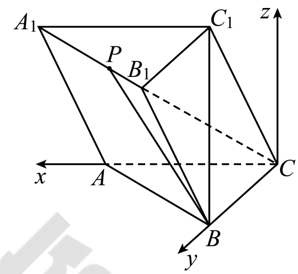
又因为 $BC_1 \cap BH = B$，所以 $AC \perp$ 平面 BB_1C_1C，

因此 $AC \perp BB_1$. ………………………………………………………………… 5 分

(2)由(1)可知，CA, CB, BC_1 两两垂直，如图，以 C 为原点建立空间直角坐标系.

则 $A(2,0,0)$，$B(0,2,0)$，$C_1(0,2,2)$，$B_1(0,4,2)$，$\overrightarrow{B_1A_1} = \overrightarrow{BA} = (2,-2,0)$.

设 $\overrightarrow{B_1P} = \lambda\overrightarrow{B_1A_1} = (2\lambda, -2\lambda, 0)$，$\lambda \in [0,1]$，



则 $P(2\lambda, 4-2\lambda, 2)$. ……………………………………………… 7 分

设平面 PBC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1 = (x, y, z)$，

因为 $\overrightarrow{BP} = (2\lambda, 2-2\lambda, 2)$，$\overrightarrow{CB} = (0,2,0)$，

所以 $\begin{cases} \boldsymbol{n}_1 \cdot \overrightarrow{BP} = 0, \\ \boldsymbol{n}_1 \cdot \overrightarrow{CB} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 2\lambda x + (2-2\lambda)y + 2z = 0, \\ 2y = 0, \end{cases}$

则有 $\begin{cases} z = -\lambda x, \\ y = 0. \end{cases}$

令 $x = 1$，得 $\boldsymbol{n}_1 = (1, 0, -\lambda)$. ……………………………………………………… 10 分

而平面 BCC_1 的一个法向量可以是 $\boldsymbol{n}_2 = (1,0,0)$，

则 $|\cos\langle \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2 \rangle| = \dfrac{|\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1| \cdot |\boldsymbol{n}_2|} = \dfrac{(1,0,-\lambda) \cdot (1,0,0)}{\sqrt{1+\lambda^2}} = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，解得 $\lambda = \dfrac{1}{3}$，

即 P 为棱 B_1A_1 的三等分点，$\dfrac{B_1P}{A_1B_1} = \dfrac{1}{3}$. ……………………………………………… 12 分

21.【考查意图】本小题以幂函数、三角函数等通过四则运算构成的新函数为数学探究创新情境，主要考查函数的图象和性质、极值、导数、不等式等基础知识；考查化归与转化、分类与整合、数形结合等数学思想；考查数学抽象、逻辑推理、数学运算、直观想象等数学核心素养。

【解析】(1)由题知 $a = -\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x) = -\dfrac{1}{2}x^3 + 2\sin x - x\cos x$，$x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

则 $f'(x) = -\dfrac{3}{2}x^2 + x\sin x + \cos x$，令 $g(x) = f'(x) = -\dfrac{3}{2}x^2 + x\sin x + \cos x$，

所以 $g'(x) = -3x + x\cos x = x(\cos x - 3) < 0$，

则 $g(x)$ 即 $f'(x)$ 在 $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减. ………………………………………………… 2 分

又 $f'(0) = 1$，$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{3}{2} \times \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2 + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}\left(1 - \dfrac{3\pi}{4}\right) < 0$，故 $\exists x_1 \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$，$f'(x_1) = 0$，

当 $0 < x < x_1$ 时，$f'(x) > 0$，$f(x)$ 单调递增；$x_1 < x < \dfrac{\pi}{2}$ 时，$f'(x) < 0$，$f(x)$ 单调递减，

所以 $x = x_1$ 为 $f(x)$ 在 $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 上的极大值点，又 $f(0) = 0$，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{\pi^3}{16} + 2 > 0$，

所以，当 $a = -\dfrac{1}{2}$，$x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$f(x) \geq 0$. ……………………………………………… 4 分

(2)由 $f(x)=ax^3+2\sin x-x\cos x$，得 $f'(x)=3ax^2+\cos x+x\sin x$，

依题意，只需探究 $f'(x)=3ax^2+\cos x+x\sin x$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上的零点个数即可，

由于 $f'(-x)=f'(x)$，则 $f'(x)$ 为偶函数，$f'(0)=1$，

故只需探究 $f'(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上的零点个数即可.

令 $u(x)=f'(x)=3ax^2+\cos x+x\sin x$，则 $u'(x)=6ax+x\cos x=x(6a+\cos x)$，

(Ⅰ)当 $6a\geqslant 1$，即 $a\geqslant\frac{1}{6}$ 时，$6a+\cos x\geqslant 0$，此时 $u'(x)\geqslant 0$ 在 $(0,\pi)$ 恒成立，

则 $u(x)$ 即 $f'(x)$ 单调递增，故 $f'(x)\geqslant f'(0)=1$，

此时 $f'(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上无零点，则 $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上的极值点个数为 0. ………………… 6 分

(Ⅱ)当 $-1<6a<1$，即 $-\frac{1}{6}<a<\frac{1}{6}$ 时，$\exists x_0\in(0,\pi)$，使得 $x_0(6a+\cos x_0)=0$，即 $\cos x_0=-6a$，

可知 $0<x<x_0$ 时，$u'(x)>0$；$x_0<x<\pi$ 时，$u'(x)<0$，

所以 $u(x)$ 即 $f'(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递增，在 (x_0,π) 上单调递减，……………………………… 7 分

由于 $f'(0)=1$，$f'(\pi)=3a\pi^2-1$，

①若 $f'(\pi)=3a\pi^2-1\geqslant 0$，即 $\frac{1}{3\pi^2}\leqslant a<\frac{1}{6}$ 时，

$f'(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上没有零点，则 $f'(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上没有零点，

故此时 $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上的极值点个数为 0. ………………………………………………… 8 分

②若 $f'(\pi)=3a\pi^2-1<0$，即 $-\frac{1}{6}<a<\frac{1}{3\pi^2}$ 时，

$f'(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上有 1 个零点，则 $f'(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上有 2 个零点，

所以，$f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上的极值点个数为 2. ………………………………………………… 10 分

(Ⅲ)当 $6a\leqslant -1$，即 $a\leqslant -\frac{1}{6}$ 时，$\forall x\in(0,\pi)$，$u'(x)<0$，

所以 $u(x)$ 即 $f'(x)$ 单调递减，由于 $f'(0)=1$，$f'(\pi)=3a\pi^2-1<0$，

$f'(x)$ 在 $(0,\pi)$ 有且仅有 1 个零点，则 $f'(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上有 2 个零点，

此时 $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上的极值点个数为 2.

综上所述：当 $a\geqslant\frac{1}{3\pi^2}$ 时，$f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上的无极值点；$a<\frac{1}{3\pi^2}$ 时，$f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上的极值点个数为 2. ………………………………………………………………………… 12 分

选考题

22.【考查意图】本小题设置课程学习情境，设计坐标系与参数方程的综合问题，考查直角坐标与极坐标的转化，参数方程与普通方程的转化，直线与圆的交点，三角形的面积等基础知识，考查化归与转化，数形结合的数学思想，考查逻辑推理与数学运算等数学素养。

【解析】(1)因为 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，

由 $x^2+y^2=|x|+y$，得 $\rho^2=|\rho\cos\theta|+\rho\sin\theta$. …………………………………………………… 2 分

由 $y>0$ 知，$\rho=\sqrt{x^2+y^2}>0$，且 $2k\pi<\theta<2k\pi+\pi$，

故 $\rho=|\cos\theta|+\sin\theta, 2k\pi<\theta<2k\pi+\pi, k\in\mathbf{Z}$. …………………………………………………… 4 分

（范围写成 $0<\theta<\pi$ 不扣分）

(2)曲线 C_1：$\begin{cases}x=t\cos\alpha,\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$ (t 为参数，$t>0$)的极坐标方程为 $\theta=\alpha$，

又 $-\sin\alpha=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)$，$\cos\alpha=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)$，

所以曲线 C_2 的极坐标方程为 $\theta=\dfrac{\pi}{2}+\alpha$. …………………………………………………… 6 分

联立曲线 C 与 C_1 的极坐标方程，得 $\rho_A=|\cos\alpha|+\sin\alpha=\cos\alpha+\sin\alpha$；

联立曲线 C 与 C_2 的极坐标方程，得 $\rho_B=|\sin\alpha|+\cos\alpha=\cos\alpha+\sin\alpha$. ……………………… 8 分

故△OAB 的面积为

$\dfrac{1}{2}\rho_A\rho_B=\dfrac{1}{2}(\cos\alpha+\sin\alpha)^2=\dfrac{1}{2}(1+2\sin\alpha\cos\alpha)=\dfrac{1}{2}(1+\sin 2\alpha)\leqslant 1$，

故当 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ 时，△OAB 面积的最大值为 1. …………………………………………………… 10 分

23.【考查意图】本小题以含有绝对值的函数为数学课程学习情景，考查函数的图象和性质，不等式的解法，不等式的证明方法等基础知识；考查函数与方程、化归与转化等数学思想；考查逻辑推理、数学运算等数学核心素养。

【解析】(1)当 $x<-2$ 时，$f(x)=-2x+2-x-2\leqslant 5-2x$，解得 $-5\leqslant x<-2$； ………… 1 分

当 $-2\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)=-2x+2+x+2\leqslant 5-2x$，解得 $-2\leqslant x\leqslant 1$； ……………………… 2 分

当 $x>1$ 时，$f(x)=2x-2+x+2\leqslant 5-2x$，此时不成立， …………………………………… 3 分

综上所述，原不等式的解集为 $\{x|-5\leqslant x\leqslant 1\}$. …………………………………………… 5 分

(2)由题意，当 $x<-2$ 时，$f(x)=-3x>6$；当 $-2\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)=-x+4\geqslant 3$；

当 $x>1$ 时，$f(x)=3x>3$，则 $f(x)$ 的最小值为 $T=3$. 所以，$a^2+b^2+2b=3$，

即 $a^2+(b+1)^2=4$. …………………………………………………………………………… 7 分

因为 $(a+b+1)^2=a^2+(b+1)^2+2a(b+1)\leqslant a^2+(b+1)^2+a^2+(b+1)^2=2[a^2+(b+1)^2]=8$，

又 a,b 为正数，则当且仅当 $a=b+1$ 时取等号，此时 $a=\sqrt{2}, b=\sqrt{2}-1$，

所以 $a+b+1\leqslant 2\sqrt{2}$，即 $a+b\leqslant 2\sqrt{2}-1$. …………………………………………… 10 分