秘密★启用前

资阳市高中2021级第二次诊断性考试

数学（文科）

本试卷满分150分，考试时间120分钟.

注意事项：

1.答卷前，考生务必将自己的姓名、座位号和准考证号填写在答题卡上.

2.回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.

3.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.已知集合 $A=\{x|-3<x<2\}, B=\{x|x^2+4x-5\le 0\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A.$\varnothing$　　B.$(-3,1]$　　C.$[-1,2)$　　D.$(-3,2)$

2.复数 $z=\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}+\mathrm{i}$，则 $|z|=$（　　）

A.1　　B.$\sqrt{2}$　　C.2　　D.4

3.已知向量 $\vec{a}=(1,3),\vec{b}=(-2,-1)$，则 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})=$（　　）

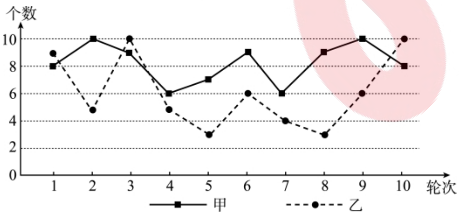
A.10　　B.18　　C.$(-7,8)$　　D.$(-4,14)$

4.已知命题 $p:\exists x\in\mathbf{R},2^x\ge 2x+1$，则 $\neg p$ 为（　　）

A.$\exists x\notin\mathbf{R},2^x<2x+1$　　B.$\exists x\in\mathbf{R},2^x<2x+1$

C.$\forall x\notin\mathbf{R},2^x<2x+1$　　D.$\forall x\in\mathbf{R},2^x<2x+1$

5.甲、乙两人进行了10轮的投篮练习，每轮各投10个，现将两人每轮投中的个数制成如下折线图：



下列说法正确的是（　　）

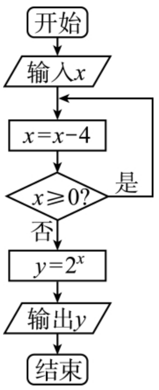
A.甲投中个数的平均数比乙投中个数的平均数小

B.甲投中个数的中位数比乙投中个数的中位数小

C.甲投中个数的标准差比乙投中个数的标准差小

D.甲投中个数的极差比乙投中个数的极差大

6.执行如图所示的程序框图，若输入的 x 值为 2023，则输出的 y 值为（　　）



A. $\frac{1}{16}$　　B. $\frac{1}{8}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{2}$

7.已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，数列 $\{b_n\}$ 是等比数列，若 $a_1+a_5+a_9=9$，$b_2b_5b_8=3\sqrt{3}$，则 $\frac{a_2+a_8}{1+b_2b_8}=$（　　）

A.2　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\frac{3}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

8.已知 F_1,F_2 为双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，点 A 在 C 上，若 $|F_1A|=2|F_2A|$，$\angle AF_1F_2=30^\circ$,□ AF_1F_2 的面积为 $6\sqrt{3}$，则 C 的方程为（　　）

A. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{6}=1$　　B. $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{6}=1$

C. $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{9}=1$　　D. $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1$

9.若直线 $y=kx$ 与曲线 $y=\ln x$ 相切，则 $k=$（　　）

A. $\frac{1}{e^2}$　　B. $\frac{2}{e^2}$　　C. $\frac{1}{e}$　　D. $\frac{2}{e}$

10.函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象经过点 $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$，将该函数的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后，所得函数图象关于原点对称，则 ω 的最小值是（　　）

A. $\frac{5}{2}$　　B. $\frac{8}{3}$　　C.3　　D. $\frac{7}{2}$

11.在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，下列结论正确的是（　　）

A. AB_1 与 A_1C_1 所成的角为 $60°$　　B. DB_1 与 A_1C_1 所成的角为 $60°$

C. AB_1 与 A_1D 所成的角为 $45°$　　D. DB_1 与 C_1D_1 所成的角为 $45°$

12.已知 O 为坐标原点，F_1,F_2 是椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，A,B 分别为 C 的左、右顶点. P 为 C 上一点，且 $PF_2\perp x$ 轴，直线 AP 与 y 轴交于点 M，直线 BM 与 PF_2 交于点 Q，直线 F_1Q 与 y 轴交于点 N.若 $|ON|=\dfrac{1}{4}|OM|$，则 C 的离心率为（　　）

A. $\dfrac{1}{3}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{2}{3}$　　D. $\dfrac{3}{4}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13.已知函数 $f(x)=(a-1)x^2+a\sin x$ 为偶函数，则 $a=$__________.

14.已知实数 x,y 满足 $\begin{cases} y\le 4-x, \\ y+2\ge 0, \\ y\le x+2, \end{cases}$ 则 $2x+3y$ 的最大值为__________.

15.在正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 内有一个球与该四棱台的每个面都相切，若 $A_1B_1=2, AB=4$，则该四棱台的高是__________.

16.《九章算术》有这样一个问题：今有女子善织，日增等尺，四日织 24 尺，且第七日所织尺数为前两日所织尺数之积.则第十日所织尺数为？译为：现有一善于织布的女子，从第 2 天开始，每天比前一天多织相同量的布，前 4 天织了 24 尺布，且第 7 天所织布尺数为第 1 天和第 2 天所织布尺数的积.问第 10 天织布尺数为__________.

三、解答题：共 70 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答.第 22、23 题为选考题，考生依据要求作答.

（一）必考题：共 60 分.

17.（12 分）

某工注重生产工艺创新，设计并试运行了甲、乙两条生产线.现对这两条生产线生产的产品进行评估，在这两条生产线所生产的产品中，随机抽取了 300 件进行测评，并将测评结果（“优”或“良”）制成如下所示列联表：

	良	优	合计
甲生产线	40	80	120
乙生产线	80	100	180
合计	120	180	300

（1）通过计算判断，是否有 90% 的把握认为产品质量与生产线有关系？

（2）现对产品进行进一步分析，在测评结果为“良”的产品中按生产线用分层抽样的方法抽取了 6 件产品.若在这 6 件产品中随机抽取 2 件，求这 2 件产品中至少有一件产自于甲生产线的概率.

附表及公式：

$P\left(K^2 \geq k_0\right)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635

其中 $K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, n=a+b+c+d$.

18.（12 分）

记$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，若$\triangle ABC$为锐角三角形，$A=\dfrac{\pi}{3}$，__________，求$\triangle ABC$面积的取值范围.

从①$a=2\sqrt{3}$；②$b=2$这两个条件中任选一个，补充在上面问题中并作答.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

19.（12 分）

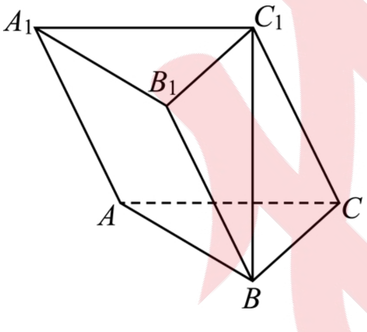
已知O为坐标原点，过点$P(2,0)$的动直线l与抛物线$C: y^2=4x$相交于A,B两点.

（1）求$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$；

（2）在平面直角坐标系xOy中，是否存在不同于点P的定点Q，使得$\angle AQP=\angle BQP$恒成立？若存在，求出点Q的坐标；若不存在，请说明理由.

20.（12 分）

如图，在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，直线$C_1B\perp$平面ABC，平面$AA_1C_1C\perp$平面BB_1C_1C.



（1）求证：$AC\perp BB_1$；

（2）若$AC=BC=BC_1=2$，在棱A_1B_1上是否存在一点P，使得四棱锥$P-BCC_1B_1$的体积为$\dfrac{4}{3}$？若存在，指出点P的位置；若不存在，请说明理由.

21.（12 分）

已知函数$f(x)=ax^3+2\sin x-x\cos x$.

（1）若 $a=0$，判断 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上的单调性，并说明理由；

（2）当 $a>0$，探究 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上的极值点个数.

（二）选考题：共 10 分.请考生在第 22，23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题记分.

22.[选修 4-4：坐标系与参数方程]（10 分）

在直角坐标系 xOy 中，已知曲线 $C:x^2+y^2=|x|+y$（其中 $y>0$），曲线 $C_1:\begin{cases}x=t\cos\alpha,\\y=t\sin\alpha\end{cases}$（$t$ 为参数，$t>0$），曲线 $C_2:\begin{cases}x=-t\sin\alpha,\\y=t\cos\alpha\end{cases}$（$t$ 为参数，$t>0,0<\alpha<\frac{\pi}{2}$）.以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系.

（1）求 C 的极坐标方程；

（2）若曲线 C 与 C_1,C_2 分别交于 A,B 两点，求□OAB 面积的最大值.

23.[选修 4-5：不等式选讲]（10 分）

设函数 $f(x)=|2x-2|+|x+2|$.

（1）解不等式 $f(x)\le 5-2x$；

（2）令 $f(x)$ 的最小值为 T，正数 a,b 满足 $a^2+b^2+2b=T$，证明：$a+b\le 2\sqrt{2}-1$.

文科数学参考解答及评分参考

一、选择题

1.【考查意图】本小题设置数学课程学习情境，设计集合运算问题，主要考查一元二次不等式的解法，集合的交集运算等基础知识；考查运算求解能力，数学运算素养.

【答案】B

【解析】由 $B=\left\{x\middle|\ x^2+4x-5\leqslant 0\right\}=\left\{x\middle|-5\leqslant x\leqslant 1\right\}$，所以

$A\cap B=\{x|-3<x<2\}\cap\left\{x\middle|-5\leqslant x\leqslant 1\right\}=\{x|-3<x\leqslant 1\}$.

2.【考查意图】本小题设置数学课程学习情境，设计复数运算问题，主要考查复数的除法、加法运算，复数模的概念等基础知识；考查运算求解能力.

【答案】C

【解析】由 $z=\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}+\mathrm{i}=\dfrac{(1+\mathrm{i})^2}{2}+\mathrm{i}=2\mathrm{i}$，

所以 $|z|=|2\mathrm{i}|=2$.

3.【考查意图】本小题设置数学课程学习情境，设计平面向量运算问题，主要考查向量的加减法运算，数量积运算等基础知识；考查运算求解能力，数学运算素养.

【答案】A

【解析】$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)=(-1,2)\cdot(4,7)=10$.

4.【考查意图】本小题设置数学课程学习情境，主要考查全称量词与存在量词的意义、含有一个量词的命题的否定等基础知识；考查数学抽象等数学核心素养.

【答案】D

【解析】依题意，对有存在量词的命题 p 的否定为 $\neg p:\forall x\in\mathbf{R},2^x<2x+1$.

5.【考查意图】本小题设置生活实践情境，主要考查直方图、统计量的含义等基础知识；考查统计与概率等数学思想；考查直观想象、数学建模等数学核心素养.

【答案】C

【解析】依直方图可知，甲投中个数的平均数、中位数分别比乙投中个数的平均数、中位数大，A, B 错误；甲投中个数的标准差比乙投中个数的平标准差小，C 正确；甲投中个数的极差比乙投中个数的极差小，D 错误.

6.【考查意图】本小题设置数学应用情境，设计程序框图问题，主要考查对程序框图以及循环结构的理解和应用等基础知识；考查读图能力和逻辑思维能力；考查逻辑推理素养.

【答案】D

【解析】运行程序，输入 $x=2023$，则 $x=2023-4=2019$，满足 $x\geqslant 0;x=2019-4=2015$，满足 $x\geqslant 0;\cdots;x=3$，满足 $x\geqslant 0;x=-1$，不满足 $x\geqslant 0$，故输出的 $y=2^{-1}=\dfrac{1}{2}$.

7.【考查意图】本小题设置数学课程学习情境，设计等差数列和等比数列问题，主要考查等差数列和等比数列的性质等基础知识；考查运算求解能力，推理论证能力.

【答案】C

【解析】由$\{a_n\}$是等差数列，$a_1+a_5+a_9=3a_5=9$得$a_5=3$，所以$a_2+a_8=2a_5=6$，由

$b_2b_5b_8=b_5^3=3\sqrt{3}$得$b_5=\sqrt{3}$，所以$b_2b_8=3$，

所以$\dfrac{a_2+a_8}{1+b_2b_8}=\dfrac{6}{1+3}=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}$.

8.【考查意图】本小题设置课程学习情境，设计求双曲线标准方程的问题，考查双曲线的定义，解三角形及三角形面积等基础知识，考查化归与转化的数学思想，考查逻辑推理与数学运算等数学素养.

【答案】B

【解析】设$|F_1F_2|=2c$，由$|F_1A|=2|F_2A|,|F_1A|-|F_2A|=2a$得$|F_1A|=4a,|F_2A|=2a$，又因为

$\angle AF_1F_2=30^\circ$，所以$\angle F_1F_2A=90^\circ,|F_1F_2|=2c=2\sqrt{3}a$，故$\triangle AF_1F_2$的面积为

$\dfrac{1}{2}|F_1F_2|\cdot|F_2A|=2\sqrt{3}a^2=6\sqrt{3}$，即$a^2=3,c^2=9,b^2=6$，故$C$的方程为$\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{6}=1$.

9.【考查意图】本小题设置有关切线的数学课程学习，考查导数的几何意义、导数的应用等基础知识，考查运算求解、推理论证等能力；考查化归与转化等思想方法.

【答案】C

【解析】设$y=kx$与曲线$y=\ln x$相切于点$A(x_0,\ln x_0)(x_0>0)$，则切线方程为$y-\ln x_0=\dfrac{1}{x_0}(x-x_0)$，即

$y=\dfrac{1}{x_0}\cdot x+\ln x_0-1$，则$k=\dfrac{1}{x_0},\ln x_0-1=0$，解得$k=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

10.【考查意图】本小题设置数学课程学习情境，设置三角函数图象问题，主要考查三角函数图象及其性质等基础知识；考查化归与转化能力、运算求解能力；考查数形结合思想，数学运算核心素养.

【答案】A

【解析】由$f(0)=-\dfrac{1}{2}$，得$\sin\varphi=-\dfrac{1}{2}$，因为$|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，所以$\varphi=-\dfrac{\pi}{6}$，所以$f(x)=\sin\left(\omega x-\dfrac{\pi}{6}\right)$，将该函数图象向右平移$\dfrac{\pi}{3}$个单位长度后所得函数图象对应的解析式为

$y=f\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\left[\omega\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)-\dfrac{\pi}{6}\right]=\sin\left[\omega x-\left(\dfrac{\omega\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6}\right)\right]$.由已知得，函数$y=\sin\left[\omega x-\left(\dfrac{\omega\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6}\right)\right]$为

奇函数，所以$\dfrac{\omega\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得$\omega=3k-\dfrac{1}{2}(k\in\mathbf{Z})$，又$\omega>0$，所以$\omega$的最小值为$\dfrac{5}{2}$.

11.【考查意图】本小题设置课程学习情境，设计空间几何问题，主要考查正方体中直线与直线的位置关系、

线线角的计算等基础知识与基本技能；考查空间想象能力，考查化归与转化等思想，考查逻辑推理、直观想象等数学素养.

【答案】A

【解析】如图，由正方体的性质，可得 $A_1C_1 // AC$,$\triangle AB_1C$ 为正三角形，

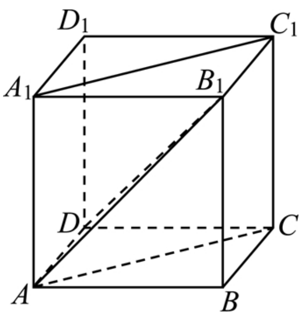
所以 $\angle B_1AC$ 为 AB_1 与 A_1C_1 所成的角，等于 60°, A 选项正确；

同理 $A_1D // B_1C, \angle AB_1C$ 为 AB_1 与 A_1D 所成的角，等于 60°, C 选项错误；

由 $B_1D \perp$ 平面 A_1BC_1，则 $B_1D \perp A_1C_1$，B 选项错误；由 $C_1D_1 // CD$，

$\angle B_1DC$ 为 DB_1 与 C_1D_1 所成的角，在 $Rt\triangle B_1DC$ 中，$\tan\angle B_1DC = \sqrt{2}$，

显然 D 选项错误.



12.【考查意图】本小题设置课程学习情境，设计与椭圆有关的综合问题，考查利用简单图形的几何性质求解点的坐标，线段长度等基础知识，考查化归转化、数形结合等思想方法，考查直观想象、数学运算等数学素养.

【答案】B

【解析】设 $|F_1F_2| = 2c$，由题知，不妨设

$P\left(c, \dfrac{b^2}{a}\right), |OM| = \dfrac{a}{a+c}|F_2P| = \dfrac{b^2}{a+c}, |F_2Q| = \dfrac{a-c}{a}|OM| = \dfrac{(a-c)b^2}{a(a+c)}, |ON| = \dfrac{1}{2}|F_2Q| = \dfrac{(a-c)b^2}{2a(a+c)}$，又因为

$|ON| = \dfrac{1}{4}|OM|$，所以 $|ON| = \dfrac{(a-c)b^2}{2a(a+c)} = \dfrac{b^2}{4(a+c)}$ 即 $a = 2c$，则 $e = \dfrac{1}{2}$.

二、填空题

13.【考查意图】本小题设置数学学科学习情境，考查函数的奇偶性等基础知识；考查化归与转化等数学思想；考查逻辑推理等数学核心素养.

【答案】0

【解析】因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(-x) = f(x)$，即 $(a-1)x^2 - a\sin x = (a-1)x^2 + a\sin x$，所以

$2a\sin x = 0$ 恒成立，所以 $a = 0$.

14.【考查意图】本小题设置数学课程学习情景，主要考查线性规划问题；查数形结合思想；考查直观想象、数学运算素养.

【答案】11

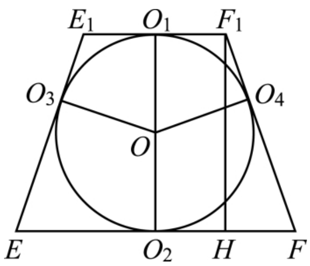
【解析】不等式组所表示的平面区域是由连接 $A(-4,-2),B(6,-2),C(1,3)$ 所构成的三角形及内部区域，当 $z=2x+3y$ 所表示的直线过点 $C(1,3)$ 时，z 的值最大，其最大值为 11.

15.【考查意图】本小题设置数学课程学习情境，设计多面体的内切球问题；主要考查正四棱台的底面与高、斜高等基础知识；考查数形结合、化归与转化等思想方法；考查直观想象、逻辑推理、数学运算等数学素养.

【答案】$2\sqrt{2}$

【解析】如图，取球心 O、球与上下底面的切点 O_1,O_2，球与左、右侧面的切点 O_3,O_4 确定的截面 EFF_1E_1.易得 $O_1F_1=O_4F_1=1,O_2F=O_4F=2$，故 $F_1F=1+2=3$，

从而四棱台的高 $h=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$.



16.【考查意图】本小题设置数学文化情境，设计数列应用问题，主要考查等差数列公差、数列通项公式等基础知识；考查运算求解能力，阅读理解能力，推理论证能力；考查数学文化，逻辑推理素养，数学运算素养.

【答案】21

【解析】设每日所织尺数为正项等差数列 $\{a_n\}$，公差为 d，由已知得 $\begin{cases}a_1+a_2+a_3+a_4=24,\\a_7=a_1\cdot a_2,\end{cases}$ 即

$\begin{cases}4a_1+6d=24,\\a_1+6d=a_1(a_1+d),\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=3,\\d=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_1=-24,\\d=20\end{cases}$（不符合题意，舍去），所以 $a_{10}=3+9\times2=21$.

三、解答题

17.【考查意图】本小题设置生活实践情境，主要考查独立性检验的基本思想及其初步应用、概率等基础知识；考查统计与概率等数学思想；考查数学运算、数据处理、数学建模等数学核心素养.

【解析】（1）由题，$K^2=\dfrac{300\times(40\times100-80\times80)^2}{120\times180\times120\times180}=\dfrac{100}{27}\approx3.704>2.706$，

因此，有 90% 的把握认为产品质量与生产线有关系.

（2）记这 6 件产品中产自于甲生产线的有 2 件，记为 A_1,A_2，产自于乙生产线的有 4 件，记为 B_1,B_2,B_3,B_4.

从这 6 件产品中随机抽取 2 件的所有基本事件有：$(A_1,A_2),(A_1,B_1),(A_1,B_2),(A_1,B_3)$，

$(A_1,B_4),(A_2,B_1),(A_2,B_2),(A_2,B_3),(A_2,B_4),(B_1,B_2),(B_1,B_3),(B_1,B_4),(B_2,B_3)$，$(B_2,B_4),(B_3,B_4)$，共15个.

其中，至少有一件产自于甲生产线的基本事件有9个.

所以，抽取的2件产品中至少有一件产自于甲生产线的概率为$\frac{9}{15}$即$\frac{3}{5}$.

18.【考查意图】本小题设置数学课程学习情境，设计结构不良问题，主要考查正弦定理，三角形面积公式，锐角三角形等基础知识；考查运算求解能力，逻辑推理能力；考查数形结合思想，化归与转化思想，数学运算素养，逻辑推理素养.

【解析】若选①，由正弦定理得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{2\sqrt{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}=4$，

所以$b=4\sin B, c=4\sin C$，

$c=4\sin C=4\sin\left(\frac{2\pi}{3}-B\right)=4\left(\sin\frac{2\pi}{3}\cos B-\cos\frac{2\pi}{3}\sin B\right)=2\sqrt{3}\cos B+2\sin B$，

所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 4\sin B\cdot\left(2\sqrt{3}\cos B+2\sin B\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=6\sin B\cos B+2\sqrt{3}\sin^2 B$

$=3\sin 2B+\sqrt{3}\left(1-\cos 2B\right)$

$=3\sin 2B-\sqrt{3}\cos 2B+\sqrt{3}$

$=2\sqrt{3}\sin\left(2B-\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}$，

因为$\triangle ABC$为锐角三角形，所以$0<C=\frac{2\pi}{3}-B<\frac{\pi}{2}$且$0<B<\frac{\pi}{2}$，

所以$\frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{2}$，

所以$\frac{\pi}{6}<2B-\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}, \frac{1}{2}<\sin\left(2B-\frac{\pi}{6}\right)\leq 1$，

所以$2\sqrt{3}<2\sqrt{3}\sin\left(2B-\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}\leq 3\sqrt{3}$，

故锐角$\triangle ABC$面积的取值范围为$\left(2\sqrt{3},3\sqrt{3}\right]$.

若选②，由正弦定理得$\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}=\frac{2}{\sin B}$，

所以 $c=\frac{2\sin C}{\sin B}=\frac{2\sin\left(A+B\right)}{\sin B}=\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{3}+B\right)}{\sin B}=\frac{\sqrt{3}\cos B+\sin B}{\sin B}=\frac{\sqrt{3}}{\tan B}+1$，

因为□ABC 为锐角三角形，所以 $0<C=\frac{2\pi}{3}-B<\frac{\pi}{2}$ 且 $0<B<\frac{\pi}{2}$，

所以 $\frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{2}$，

所以 $\tan B>\frac{\sqrt{3}}{3}, c=\frac{\sqrt{3}}{\tan B}+1\in\left(1,4\right)$，

所以 $S_{\square ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}c\in\left(\frac{\sqrt{3}}{2},2\sqrt{3}\right)$.

故锐角□ABC 面积的取值范围为 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},2\sqrt{3}\right)$.

19.【考查意图】本小题设置课程学习情境，设计直线与抛物线的综合问题，主要考查直线与抛物线的交点坐标、抛物线的对称性等基础知识，考查特殊与一股、化归与转化等数学思想，考查类比推理及数学运算素养.

【解析】(1) 由题知，直线 l 与 y 轴不垂直，

故可设直线 l 的方程为 $x=my+2, A\left(x_1,y_1\right), B\left(x_2,y_2\right)$.

由 $\begin{cases} y^2=4x, \\ x=my+2 \end{cases}$ 得 $y^2-4my-8=0$.

显然，$\Delta=16m^2+32>0$，

于是 $y_1+y_2=4m, y_1y_2=-8, x_1x_2=\frac{1}{16}y_1^2y_2^2=4$.

所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=-4$.

(2) 当直线 $l\perp x$ 轴时，$l:x=2, A\left(2,2\sqrt{2}\right), B\left(2,-2\sqrt{2}\right)$，

故当 $\angle AQP=\angle BQP$ 时，点 $Q\in x$ 轴.

当直线 l 与 x 轴不垂直时，由抛物线的对称性知，满足条件的点 $Q\in x$ 轴，设 $Q\left(n,0\right)$，

由 $\angle AQP=\angle BQP$ 得 $k_{AQ}+k_{BQ}=0$，

即 $\frac{y_1}{x_1-n}+\frac{y_2}{x_2-n}=0$，

整理得 $y_1\left(x_2-n\right)+y_2\left(x_1-n\right)=0$，即

$y_1(my_2+2-n)+y_2(my_1+2-n)=0$，

所以 $2my_1y_2+(2-n)(y_1+y_2)=0$.

故 $-16m+4(2-n)m=0$，解得 $n=-2$.

综上，存在定点 $Q(-2,0)$ 满足条件.

20.【考查意图】本小题设置数学课程学习情境，设计柱体相关的综合问题，主要考查直线与平面垂直的判定及性质，平面与平面垂直的性质，二面角的平面角的计算等基础知识与基本技能；考查数形结合、化归与转化等思想方法，考查直观想象、逻辑推理、数学运算等数学素养.

【解析】(1) 在平面 BB_1C_1C 中作 $BH\perp CC_1$ 于 H，

因为平面 $AA_1C_1C\perp$ 平面 BB_1C_1C，

且平面 $AA_1C_1C\cap$ 平面 $BB_1C_1C=CC_1$，

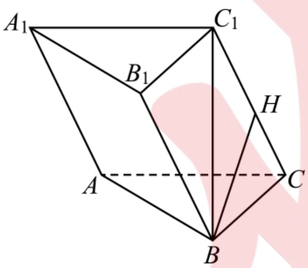
所以 $BH\perp$ 平面 AA_1C_1C，从而 $AC\perp BH$.

在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$C_1B\perp$ 平面 $ABC, AC\subset$ 平面 ABC，

所以 $AC\perp C_1B$.

又因为 $BC_1\cap BH=B$，所以 $AC\perp$ 平面 BB_1C_1C，

因此 $AC\perp BB_1$.



(2) 假设点 P 存在，在平面 $A_1B_1C_1$ 中，

作 $PM\parallel A_1C_1$ 交 B_1C_1 于 M，

则 $PM\parallel AC$，因为 $AC\perp$ 平面 BB_1C_1C，故 $PM\perp$ 平面 BB_1C_1C.

在平行四边形 BCC_1B_1 中，因为 $C_1B\perp BC$，且 $BC=BC_1=2$.

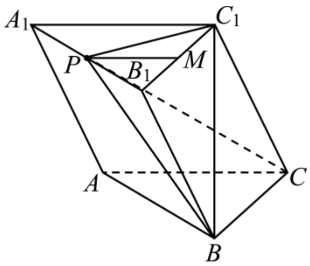
所以 $S_{\square BCC_1B_1}=BC\cdot C_1B=2\times2=4$.

所以$V_{P-BCC_1B_1}=\frac{1}{3}S_{□BCC_1B_1}\cdot PM=\frac{4}{3}\cdot PM=\frac{4}{3}$，

所以$PM=1$.

因$A_1C_1=2$，所以$\frac{PM}{A_1C_1}=\frac{1}{2}$.

故符合条件的点P存在，为A_1B_1的中点.



21.【考查意图】本小题以幂函数、三角函数等通过四则运算构成的新函数为数学探究创新情境，主要考查函数的图象和性质、导数、不等式等基础知识；考查化归与转化、分类与整合、数形结合等数学思想；考查数学抽象、逻辑推理、数学运算、直观想象等数学核心素养.

【解析】(1) 当$a=0$时，$f(x)$在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上是单调递增函数，

理由如下：

思路1：依题意，$f(x)=2\sin x-x\cos x, f'(x)=\cos x+x\sin x$，

当$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$f'(x)=\cos x+x\sin x>0$；

当$x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$时，$\cos x>0, x\sin x>0$，则$f'(x)=\cos x+x\sin x>0$，

故$x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$时，$f'(x)>0$，

所以$f(x)$在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上是单调递增函数.

思路2：依题意，$f(x)=2\sin x-x\cos x, f'(x)=\cos x+x\sin x$，

由于$f(-x)=-f(x)$，则$f(x)$为奇函数，故可先判断$f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调性.

当$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$f'(x)=\cos x+x\sin x>0$，此时$f(x)$单调递增，

由于 $f\left(x\right)$ 为奇函数，所以 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上是单调递增函数.

（2）由 $f\left(x\right)=ax^{3}+2\sin x-x\cos x$，得 $f'\left(x\right)=3ax^{2}+\cos x+x\sin x$，

依题意，只需探究 $f'\left(x\right)=3ax^{2}+\cos x+x\sin x$ 在 $\left(0,\pi\right)$ 上的零点个数即可.

令 $u\left(x\right)=f'\left(x\right)=3ax^{2}+\cos x+x\sin x$，则 $u'\left(x\right)=6ax+x\cos x=x\left(6a+\cos x\right)$，

（i）当 $6a\geqslant 1$，即 $a\geqslant\frac{1}{6}$ 时，$6a+\cos x\geqslant 0$，此时 $u'\left(x\right)\geqslant 0$ 在 $\left[0,\pi\right)$ 恒成立，

则 $u\left(x\right)$ 即 $f'\left(x\right)$ 单调递增，故 $f'\left(x\right)\geqslant f'\left(0\right)=1$，

此时 $f'\left(x\right)$ 在 $\left(0,\pi\right)$ 上无零点，则 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,\pi\right)$ 上的极值点个数为 0.

（ii）当 $0<6a<1$，即 $0<a<\frac{1}{6}$ 时，$\exists x_{0}\in\left(0,\pi\right)$，使得 $x_{0}\left(6a+\cos x_{0}\right)=0$，即 $\cos x_{0}=-6a$，

可知 $0<x<x_{0}$ 时，$u'\left(x\right)>0; x_{0}<x<\pi$ 时，$u'\left(x\right)<0$，

所以 $u\left(x\right)$ 即 $f'\left(x\right)$ 在 $\left(0,x_{0}\right)$ 上单调递增，在 $\left(x_{0},\pi\right)$ 上单调递减，

由于 $f'\left(0\right)=1, f'\left(\pi\right)=3a\pi^{2}-1$，

①若 $f'\left(\pi\right)=3a\pi^{2}-1\geqslant 0$，即 $\frac{1}{3\pi^{2}}\leqslant a<\frac{1}{6}$ 时，$f'\left(x\right)$ 在 $\left(0,\pi\right)$ 上没有零点，

所以，$f\left(x\right)$ 在 $\left(0,\pi\right)$ 上的极值点个数为 0.

②若 $f'\left(\pi\right)=3a\pi^{2}-1<0$，即 $0<a<\frac{1}{3\pi^{2}}$ 时，$f'\left(x\right)$ 在 $\left(0,\pi\right)$ 上有 1 个零点，

所以，$f\left(x\right)$ 在 $\left(0,\pi\right)$ 上的极值点个数为 1.

综上所述：当 $a\geqslant\frac{1}{3\pi^{2}}$ 时，$f\left(x\right)$ 在 $\left(0,\pi\right)$ 上的极值点个数为 $0; 0<a<\frac{1}{3\pi^{2}}$ 时，$f\left(x\right)$ 在 $\left(0,\pi\right)$ 上的极值点个数为 1.

选考题

22.【考查意图】本小题设置课程学习情境，设计坐标系与参数方程的综合问题，考查直角坐标与极坐标的转化，参数方程与普通方程的转化，直线与圆的交点，三角形的面积等基础知识，考查化归与转化，数形结合的数学思想，考查逻辑推理与数学运算等数学素养.

【解析】（1）因为 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$，

由 $x^{2}+y^{2}=\left|x\right|+y$，得 $\rho^{2}=\left|\rho\cos\theta\right|+\rho\sin\theta$.

由 $y>0$ 知，$\rho=\sqrt{x^{2}+y^{2}}>0$，且 $2k\pi<\theta<2k\pi+\pi$，

故 $\rho=|\cos\theta|+\sin\theta, 2k\pi<\theta<2k\pi+\pi, k\in\mathbf{Z}$.

（2）曲线 $C_1:\begin{cases}x=t\cos\alpha,\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$（$t$ 为参数，$t>0$）的极坐标方程为 $\theta=\alpha$，

又 $-\sin\alpha=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right), \cos\alpha=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)$，

所以曲线 C_2 的极坐标方程为 $\theta=\dfrac{\pi}{2}+\alpha$.

联立曲线 C 与 C_1 的极坐标方程，得 $\rho_A=|\cos\alpha|+\sin\alpha=\cos\alpha+\sin\alpha$；

联立曲线 C 与 C_2 的极坐标方程，得 $\rho_B=|\sin\alpha|+\cos\alpha=\cos\alpha+\sin\alpha$.

故△OAB 的面积为

$\dfrac{1}{2}\rho_A\rho_B=\dfrac{1}{2}(\cos\alpha+\sin\alpha)^2=\dfrac{1}{2}(1+2\sin\alpha\cos\alpha)=\dfrac{1}{2}(1+\sin2\alpha)\leqslant 1$，

故当 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ 时，△OAB 面积的最大值为 1.

23.【考查意图】本小题以含有绝对值的函数为数学课程学习情景，考查函数的图象和性质，不等式的解法，不等式的证明方法等基础知识；考查函数与方程、化归与转化等数学思想；考查逻辑推理、数学运算等数学核心素养.

【解析】（1）当 $x<-2$ 时，$f(x)=-2x+2-x-2\leqslant 5-2x$，解得 $-5\leqslant x<-2$；

当 $-2\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)=-2x+2+x+2\leqslant 5-2x$，解得 $-2\leqslant x\leqslant 1$；

当 $x>1$ 时，$f(x)=2x-2+x+2\leqslant 5-2x$，此时不成立，

综上所述，原不等式的解集为 $\{x|-5\leqslant x\leqslant 1\}$.

（2）由题意，当 $x<-2$ 时，$f(x)=-3x>6$；当 $-2\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)=-x+4\geqslant 3$；

当 $x>1$ 时，$f(x)=3x>3$，则 $f(x)$ 的最小值为 $T=3$.所以，$a^2+b^2+2b=3$，

即 $a^2+(b+1)^2=4$.

因为 $(a+b+1)^2=a^2+(b+1)^2+2a(b+1)\leqslant a^2+(b+1)^2+a^2+(b+1)^2=2\left[a^2+(b+1)^2\right]=8$，

又 a,b 为正数，则当且仅当 $a=b+1$ 时取等号，此时 $a=\sqrt{2}, b=\sqrt{2}-1$，

所以 $a+b+1\leqslant 2\sqrt{2}$，即 $a+b\leqslant 2\sqrt{2}-1$.