理科数学参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
选项	C	D	C	A	B	A	B	D	B	D	C	D

二．填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．把答案填在答题卡上.

13．$\underline{1}$　　14．$\underline{-3}$　　15．$\underline{78\pi}$　　16．$\underline{\frac{1}{2}}$

三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第 17—21 题必考题，每个试题考生必须作答.第 22、23 题为选考题，考试根据要求作答.

(一)必考题

17．解：(1)$\because$ 数列$\{a_n\}$是等比数列且a_4是$6a_2$和a_3的等差中项

$\therefore 2a_4=6a_2+a_3$　即$2a_1q^3=6a_1q+a_1q^2$

整理得:$2q^2-q-6=0$

解得：$q=2$或$q=-\frac{3}{2}$ ……………………………………4分

当$q=2$时，$a_n=a_1\cdot q^{n-1}=2^n$.

当$q=-\frac{3}{2}$时，$a_n=a_1\cdot q^{n-1}=2\cdot(-\frac{3}{2})^{n-1}$.

$\therefore a_n=2^n$或$a_n=2\cdot(-\frac{3}{2})^{n-1}$　$(n\in N^*)$. ……………………………………6分

（2）由(1)得，若$q>0$，$a_n=2^n$

$$b_n=\frac{1}{\log_2 a_n\cdot\log_2 a_{n+1}}=\frac{1}{\log_2 2^n\cdot\log_2 2^{n+1}}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$ ……………………8分

$$\begin{aligned}T_{2023}&=b_1+b_2+\cdots+b_{2022}+b_{2023}\\&=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{2022}-\frac{1}{2023})+(\frac{1}{2023}-\frac{1}{2024})\\&=1-\frac{1}{2024}=\frac{2023}{2024}.\end{aligned}$$ ……………………………………12分

18.解：(1).由题意得$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\frac{200(60\times20-80\times40)^2}{100\times100\times140\times60}$

$=\frac{200}{21}\approx 9.524>7.879$ ……………………4分

故有 99.5%的把握认为 70 岁以上老人感染支原体肺炎与自身有慢性疾病有关. ……………5分

(2).现从感染支原体肺炎的 60 位老人中按分层抽样的方式抽出 6 人，则 6 人中有慢性疾病 4 人，无有慢性疾病 2 人. ……………………………………………6分

再从 6 人中随机抽出 4 人，则抽出的 4 人中可能有以下 3 种组合：

①有慢性疾病 4 人；　此时 $\xi = 8$ 万元

②有慢性疾病 3 人，无有慢性疾病 1 人；　此时 $\xi = 7$ 万元

③有慢性疾病 2 人，无有慢性疾病 2 人；　此时 $\xi = 6$ 万元

所以 ξ 的可能取值为8，7，6 ……………………………………………8分

故 $P(\xi=8)=\dfrac{C_4^4}{C_6^4}=\dfrac{1}{15}$；$P(\xi=7)=\dfrac{C_4^3C_2^1}{C_6^4}=\dfrac{8}{15}$；$P(\xi=6)=\dfrac{C_4^2C_2^2}{C_6^4}=\dfrac{6}{15}$

故 ξ 的分布列为：

ξ	8	7	6
P	$\dfrac{1}{15}$	$\dfrac{8}{15}$	$\dfrac{2}{5}$

……………………………11分

则 ξ 的数学期望 $E(\xi)=8\times\dfrac{1}{15}+7\times\dfrac{8}{15}+6\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{20}{3}$(万元) ……………………………12分

19 (1).方法一：

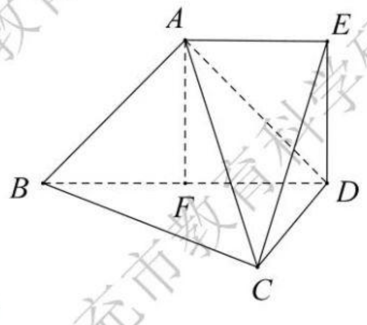
证明：取 BD 的中点 F ,连结 AF

$\because AD = AB$

$\therefore AF \perp BD$

$\because BD = 4$　$AD = 2\sqrt{3}$

$\therefore DF = 2$　$AF=\sqrt{AD^2-DF^2}=2\sqrt{2}$ ……………………………2分



$\because DE \perp$ 平面BCD

$\therefore DE \perp BD$

$\because DE = 2\sqrt{2}$

$\therefore AF /\!/ DE$，$AF = DE$

$\therefore$四边形$FDEA$为矩形 ……………………………4分

$\therefore AE /\!/ BD$

$\because AE \not\subset$ 平面BCD　$BD \subset$ 平面BCD

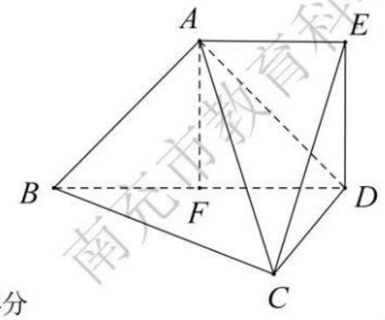
$\therefore AE /\!/$ 平面BCD ……………………………6分

方法二：

证明：取 BD 的中点 F，连结 AF

$\because AD=AB=2\sqrt{3}$，$BD=4$

$\therefore AF\perp BD$



$\therefore AF=\sqrt{AD^2-DF^2}=2\sqrt{2}$ ……………………………2分

$\because DE\perp$ 平面 BCD，$DE\subset$ 平面 $ABDE$

$\therefore$ 平面 $ABDE\perp$ 平面 BCD

$\because AF\subset$ 平面 $ABDE$，平面 $ABDE\cap$ 平面 $BCD=BD$

$\therefore AF\perp$ 平面 BCD ……………………………………………4分

$\therefore AF\,//\,DE$，$AF=DE$

$\therefore$ 四边形 $FDEA$ 为矩形 ………………………………………………5分

$\therefore AE\,//\,BD$

$\because AE\not\subset$ 平面 BCD　$BD\subset$ 平面 BCD

$\therefore AE\,//$ 平面 BCD ……………………………………………………6分

(2)取 BC 的中点 M，连结 AM,FM.

$\because \angle BCD=90^\circ$

$\therefore CF=FB=2$，

$\because AF\,//\,DE$，$DE\perp$ 平面 BCD

$\therefore AF\perp$ 平面 BCD

$\therefore AF\perp CF$

又 $CF=2$，$AF=2\sqrt{2}$

$\therefore AC=\sqrt{AF^2+CF^2}=2\sqrt{3}$

$\therefore AC=AB$

$\because M$ 为 BC 的中点

$\therefore BC\perp MF, BC\perp AM$

$\therefore \angle AMF$ 为二面角 $A-BC-D$ 的平面角

$\therefore Rt\Delta AFM$ 中，$\tan\angle AMF=\dfrac{AF}{MF}=2\sqrt{2}$

$\therefore FM=1$

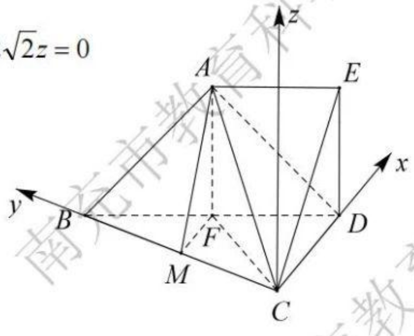
$\therefore CD=2$，$BC=2\sqrt{3}$ ……………………………8分

方法一：以C为坐标原点，CD为x轴，CB为y轴，建立如图所示的空间直角坐标系$C-xyz$，

$\therefore C(0,0,0)$，$D(2,0,0)$，$E(2,0,2\sqrt{2})$，$A(1,\sqrt{3},2\sqrt{2})$，$B(0,2\sqrt{3},0)$.

$\therefore \overrightarrow{CE}=(2,0,2\sqrt{2})$，$\overrightarrow{CA}=(1,\sqrt{3},2\sqrt{2})$，$\overrightarrow{CB}=(0,2\sqrt{3},0)$

设平面ABC的法向量$\vec{n}=(x,y,z)$，由$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CA}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CB}=0\end{cases}$ 得$\begin{cases}x+\sqrt{3}y+2\sqrt{2}z=0\\ 2\sqrt{3}y=0\end{cases}$



取$z=-1$ 得：$\vec{n}=(2\sqrt{2},0,-1)$ ……………………………10分

设直线CE与平面ABC所成角为θ，

则$\sin\theta=\left|\cos<\vec{n},\overrightarrow{CE}>\right|=\left|\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{CE}}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CE}\right|}\right|=\dfrac{2\sqrt{2}\times2-2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}\times3}=\dfrac{\sqrt{6}}{9}$

$\therefore$直线CE与平面ABC所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{6}}{9}$. ……………………………12分

方法二：

过C作BD的垂线交BD于H

$\therefore CH\perp BD$

$\because DE\perp$平面BCD，$CH\subset$平面BCD

$\therefore DE\perp CH$

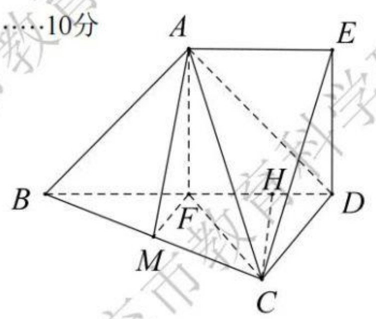
又$BD\cap DE=D$

$\therefore CH\perp$平面$ABDE$

在ΔBCD中，由$S_{\Delta BCD}=\dfrac{1}{2}BC\times CD=\dfrac{1}{2}BD\times CH$，得$CH=\sqrt{3}$

又$S_{\Delta BAE}=S_{\Delta DAE}=\dfrac{1}{2}AE\times DE=2\sqrt{2}$

$\therefore V_{C-BAE}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta BAE}\times CH=\dfrac{1}{3}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ ……………………………10分



又$AB=BC=CA=2\sqrt{3}$

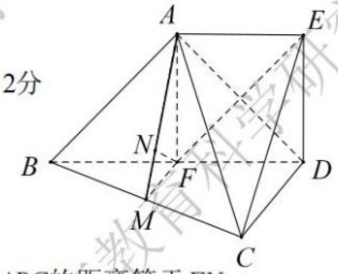
$\therefore\Delta ABC$为等边三角形，$S_{\Delta ABC}=3\sqrt{3}$

设点E到平面ABC的距离为h，由$V_{E-ABC}=V_{C-BAE}$得：$h=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

故点E到平面ABC的距离为$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. ……………………………11分

又$Rt\Delta CDE$中，$DE=2\sqrt{2}$，$CD=2$

$\therefore CE=2\sqrt{3}$



所以直线CE与平面ABC所成角的正弦值为$\dfrac{h}{CE}=\dfrac{\sqrt{6}}{9}$ ………………12分

注：以下方法酌情给分

由$EF//$平面ABC知，E、F到平面ABC的距离相等，如右图，

取BC中点M，过F作$FN\perp AM$于N，则可证$FN\perp$平面ABC，即E到平面ABC的距离等于FN.

20题：(1).由$h(x)\geq 2$ 得：$\dfrac{mf(x)}{\sin x}\geq 2$

$\therefore x\in(0,\pi)$时　$m\geq\dfrac{\sqrt{2}\sin x}{e^x}$恒成立…………………………1分

令$\varphi(x)=\dfrac{\sqrt{2}\sin x}{e^x}$　$(0<x<\pi)$

$\therefore \varphi'(x)=\dfrac{\sqrt{2}(\cos x-\sin x)}{e^x}$ …………………………2分

由$\varphi'(x)>0$得：$0<x<\dfrac{\pi}{4}$；由$\varphi'(x)<0$得：$\dfrac{\pi}{4}<x<\pi$

$\varphi(x)$在$(0,\dfrac{\pi}{4})$上单调递增；在$(\dfrac{\pi}{4},\pi)$上单调递减

$\therefore \varphi(x)_{\max}=\varphi(\dfrac{\pi}{4})=e^{-\frac{\pi}{4}}$ ……………………………………4分

所以m的取值范围为 $[e^{-\frac{\pi}{4}},+\infty)$ …………………………5分

(2).由已知$f(x)$与$g(x)$的图像关于直线$y=x$对称

$\therefore g(x)=\ln x$ …………………………6分

设公切线与$f(x)=e^x$相切于点(s,e^s)，与$g(x)=\ln x$相切于点$(t,\ln t)$

由$f'(x)=e^x$，$g'(x)=\dfrac{1}{x}$知公切线可分别表示为：

$y-e^s=e^s(x-s)$，即$y=e^sx+e^s(1-s)$或$y-\ln t=\dfrac{1}{t}(x-t)$，即$y=\dfrac{1}{t}x+\ln t-1$

$\therefore\begin{cases}e^s=\dfrac{1}{t} & \cdots\cdots① \\ e^s(1-s)=\ln t-1 & \cdots\cdots②\end{cases}$ 由①②消去t得：$e^s(1-s)=-1-s$

即 $e^s(s-1)-s-1=0$ …………………………8分…………(*)

令$F(x)=(x-1)e^x-x-1$，则 $F'(x)=xe^x-1$，

显然$x\leq 0$时，$F'(x)<0$

当$x>0$时，令$\mu(x)=F'(x)=xe^x-1$，

$\therefore \mu'(x)=(x+1)e^x>0$，故$\mu(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增

又 $F'(0)=-1<0$，$F'(1)=e-1>0$

$\therefore \exists x_0 \in (0,1)$ 使得 $F'(x_0)=x_0e^{x_0}-1=0$

$\therefore$ 当 $x<x_0$ 时，$F'(x)<0$，$F(x)$ 单调递减；当 $x>x_0$ 时，$F'(x)>0$，$F(x)$ 单调递增 …………10分

又 $F(-2)=-\dfrac{3}{e^2}+1>0$，$F(-1)=-\dfrac{2}{e}<0$；$F(1)=-2<0$，$F(2)=e^2-3>0$

所以 $F(x)$ 有且仅有两个零点 x_1,x_2，且 $x_1\in(-2,-1)$，$x_2\in(1,2)$. ……………………11分

由 $F(x_1)=(x_1-1)e^{x_1}-x_1-1=0$ 知：

$$F(-x_1)=(-x_1-1)e^{-x_1}+x_1-1=\frac{(x_1-1)e^{x_1}-x_1-1}{e^{x_1}}=0$$

由 $x_1\in(-2,-1)$ 知 $x_1\neq -x_1$

$\therefore -x_1=x_2$　即 $x_1+x_2=0$

$\therefore f(x)$ 与 $g(x)$ 有且仅有两条公切线，且 $f(x)$ 图像上两切点横坐标互为相反数. …………12分

注：(*)处由①②消去 t 得：$e^s-\dfrac{s+1}{s-1}=0$ 或 $e^s=\dfrac{s+1}{s-1}$

或由①②消去 s 得：$(t-1)\ln t-t-1=0$ 或 $\ln t-\dfrac{t+1}{t-1}=0$

再构造函数证明，具体过程可参照文科20题(2)的解法，评分标准酌情处理

21 解：(1).显然四边形 $ABCD$ 为菱形，

故其内切圆以 O 为圆心，半径 r 为 O 到直线 AD 的距离 …………1分

又由 $A(-\sqrt{5},0)$，$D(0,1)$ 得直线 AD 的方程为：$x-\sqrt{5}y+\sqrt{5}=0$ …………3分

故原点到直线 AD 的距离 $d=\dfrac{|\sqrt{5}|}{\sqrt{1+5}}=\sqrt{\dfrac{5}{6}}=r$ …………4分

故四边形 $ABCD$ 内切圆的标准方程为：$x^2+y^2=\dfrac{5}{6}$ …………5分

(2).方法一：

由题意可知 $F_1(-2,0)$，故 MN 方程为：$y=k(x+2)$ ……………………6分

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$

则直线 MP 的方程为：$y=\dfrac{y_1}{x_1-1}(x-1)$

联立 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{5}+y^2=1\\ y=\dfrac{y_1}{x_1-1}(x-1)\end{cases}$ 得：$[5y_1^2+(x_1-1)^2]x^2-10y_1^2x+5y_1^2-5x_1^2+10x_1-5=0$……(*)

又 $M(x_1,y_1)$ 在椭圆 E 上，故 $\frac{x_1^2}{5}+y_1^2=1$，即 $5y_1^2=5-x_1^2$

代入(*)式整理得：$(3-x_1)x^2-5y_1^2x+5x_1-3x_1^2=0$ ……………………8分

显然 $3-x_1\neq 0$，$\Delta>0$

$$\therefore x_1\cdot x_P=\frac{5x_1-3x_1^2}{3-x_1}$$

$$\therefore x_P=\frac{3x_1-5}{x_1-3},\qquad y_P=\frac{y_1}{x_1-1}(x_P-1)=\frac{2y_1}{x_1-3}=\frac{2k(x_1+2)}{x_1-3}$$

故 $P\left(\frac{3x_1-5}{x_1-3},\frac{2k(x_1+2)}{x_1-3}\right)$ ……………………9分

同理：$Q\left(\frac{3x_2-5}{x_2-3},\frac{2k(x_2+2)}{x_2-3}\right)$；

$$\therefore k'=\frac{\frac{2k(x_1+2)}{x_1-3}-\frac{2k(x_2+2)}{x_2-3}}{\frac{3x_1-5}{x_1-3}-\frac{3x_2-5}{x_2-3}}=\frac{2k[(x_1+2)(x_2-3)-(x_2+2)(x_1-3)]}{(3x_1-5)(x_2-3)-(3x_2-5)(x_1-3)}$$

$$=\frac{2k(5x_2-5x_1)}{4x_2-4x_1}=\frac{5k}{2}$$ ……………………11分

故 $k'=\frac{5k}{2}$，即 $k=\frac{2}{5}k'$

所以：存在常数 $\lambda=\frac{2}{5}$ 满足题意. ……………………12分

方法二：

由题意可知 $F_1(-2,0)$，故 MN 方程为：$y=k(x+2)$ ……………………6分

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，$P(x_3,y_3)$，$Q(x_4,y_4)$

设 $\overrightarrow{MR}=t\overrightarrow{RP}$

$\therefore (1-x_1,-y_1)=t(x_3-1,y_3)$

$\begin{cases}1-x_1=t(x_3-1)\\ -y_1=ty_3\end{cases}$ 得：$\begin{cases}x_1+tx_3=1+t\\ y_1+ty_3=0\end{cases}$ ……(*) ……………………7分

$\because \begin{cases}\frac{x_1^2}{5}+y_1^2=1\cdots\cdots①\\ \frac{x_3^2}{5}+y_3^2=1\cdots\cdots②\end{cases}$ 由① $-$ ② $\times t^2$ 得：$\frac{x_1^2-t^2x_3^2}{5}+y_1^2-t^2y_3^2=1-t^2$

$$\therefore \frac{(x_1+tx_3)(x_1-tx_3)}{5}+(y_1+ty_3)(y_1-ty_3)=1-t^2$$

将(*)带入上式得：$\frac{(1+t)(x_1-tx_3)}{5}+0=1-t^2$　即：$x_1-tx_3=5-5t$ ……………………9分

又 $\because x_1+tx_3=1+t$

$\therefore x_1=3-2t$，$x_3=3-\frac{2}{t}$

$\therefore y_3=-\frac{1}{t}y_1=-\frac{1}{t}k(x_1+2)=k(2-\frac{5}{t})$

设 $\overrightarrow{NR}=\mu\overrightarrow{RQ}$，同理可得：

$x_4=3-\frac{2}{\mu}$，$y_4=k(2-\frac{5}{\mu})$ ……………………………………10分

$$\therefore k'=\frac{y_3-y_4}{x_3-x_4}=\frac{k(2-\frac{5}{t})-k(2-\frac{5}{\mu})}{(3-\frac{2}{t})-(3-\frac{2}{\mu})}=\frac{5k(\frac{1}{t}-\frac{1}{\mu})}{2(\frac{1}{t}-\frac{1}{\mu})}=\frac{5}{2}k$$ ……………………11分

故 $k'=\frac{5k}{2}$，即 $k=\frac{2}{5}k'$

所以：存在常数 $\lambda=\frac{2}{5}$ 满足题意. ……………………12分

22.解：(1).显然 C_1 是过原点且倾斜角为 α 的直线 ……………………1分

$\therefore C_1$ 的极坐标方程为 $\theta=\alpha$ $(0<\alpha<\frac{\pi}{2},\ \rho\in R)$ ……………………3分

C_2 的极坐标方程为 $\theta=\alpha+\frac{\pi}{2}$ $(0<\alpha<\frac{\pi}{2},\ \rho\in R)$. ……………………5分

(2).由 $\begin{cases}\rho=8\sin\theta\\ \theta=\alpha\end{cases}$ 得 A 的极坐标为 $(8\sin\alpha,\ \alpha)$

由 $\begin{cases}\rho=8\sin\theta\\ \theta=\alpha+\frac{\pi}{2}\end{cases}$ 得 B 的极坐标为 $\left(8\sin(\alpha+\frac{\pi}{2}),\ \alpha+\frac{\pi}{2}\right)$，即 $\left(8\cos\alpha,\ \alpha+\frac{\pi}{2}\right)$. ……7分

$\therefore |OA|=8\sin\alpha$，$|OB|=8\cos\alpha$ ……………………8分

$\therefore \Delta AOB$ 的面积为：$S=\frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|=32\sin\alpha\cos\alpha=16\sin 2\alpha$ ……………………9分

又 $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$

$\therefore \alpha=\frac{\pi}{4}$ 时，ΔAOB 面积的最大值为16. ……………………10分

23.解：(1) $f(x)=|x-4|-|x+2|=\begin{cases}6 & x<-2\\ -2x+2 & -2\le x<4\\ -6 & x\ge 4\end{cases}$ ………………2分

$\therefore$ 当 $x\ge 4$ 时，$f(x)_{\min}=-6$ ……………………………………3分

$\because f(x)-a^2+5a\ge 0$ 恒成立

$\therefore -6-a^2+5a\ge 0$ 即 $a^2-5a+6\le 0$

$\therefore 2\le a\le 3$

故 a 的取值范围为 $[2,3]$. ………………………………5分

(2) 由(1)知：$M=6$. 即 $a+b+c=6$ ………………………6分

法 1：

$\therefore(\sqrt{a+1}+\sqrt{b+2}+\sqrt{c+3})^2$

$=a+1+b+2+c+3+2\sqrt{(a+1)(b+2)}+2\sqrt{(a+1)(c+3)}+2\sqrt{(b+2)(c+3)}$

$\le a+b+c+6+(a+1)+(b+2)+(a+1)+(c+3)+(b+2)+(c+3)$

$=3(a+b+c)+18=36$ ……………………………………………………………8分

当且仅当 $\begin{cases}\sqrt{a+1}=\sqrt{b+2}=\sqrt{c+3}\\ a+b+c=6\end{cases}$，即 $\begin{cases}a=3\\ b=2\\ c=1\end{cases}$ 时等号成立 …………………9分

$\therefore \sqrt{a+1}+\sqrt{b+2}+\sqrt{c+3}$ 的最大值为 6. ……………………10分

法 2：(柯西不等式)

$\because a>0\quad b>0\quad c>0$

$\therefore(\sqrt{a+1}\cdot 1+\sqrt{b+2}\cdot 1+\sqrt{c+3}\cdot 1)^2$

$\le\left[(\sqrt{a+1})^2+(\sqrt{b+2})^2+(\sqrt{c+3})^2\right]\cdot(1^2+1^2+1^2)$

$=(a+b+c+6)\times 3=36$ ………………………………………8分

当且仅当 $\begin{cases}\dfrac{\sqrt{a+1}}{1}=\dfrac{\sqrt{b+2}}{1}=\dfrac{\sqrt{c+3}}{1}\\ a+b+c=6\end{cases}$，即 $\begin{cases}a=3\\ b=2\\ c=1\end{cases}$ 时等号成立 …………………9分

$\therefore \sqrt{a+1}+\sqrt{b+2}+\sqrt{c+3}$ 的最大值为 6. ……………………10分