成都市 2021 级高中毕业班第一次诊断性检测

数学(理科)参考答案及评分意见

第Ⅰ卷　(选择题,共 60 分)

一、选择题:(每小题 5 分,共 60 分)

1. D;　2. C;　3. A;　4. D;　5. C;　6. B;　7. B;　8. A;　9. C;　10. A;　11. D;　12. C.

第Ⅱ卷　(非选择题,共 90 分)

二、填空题:(每小题 5 分,共 20 分)

13. $(0,2)$;　14. $5x-y-2=0$;　15. 2 或 2022;　16. $\dfrac{25\pi}{2}$.

三、解答题:(共 70 分)

17. **解:**(Ⅰ)连接 A_1C_1.

∵正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,M 为 AA_1 的中点,$AB=2$,$AA_1=4$,

∴ $A_1C_1=2\sqrt{2}$,$A_1M=AM=2$,$DM=2\sqrt{2}$,$C_1D=2\sqrt{5}$,$MC_1=2\sqrt{3}$.　……2 分

∵ $C_1M^2+DM^2=DC_1^2$,

∴ $C_1M\perp DM$.　……3 分

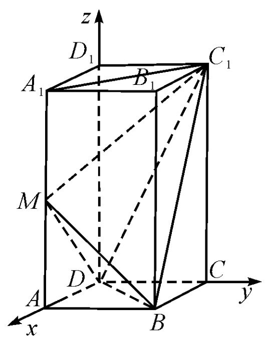
同理可得 $C_1M\perp BM$.　……4 分

∵ $DM\cap BM=M$,$DM\subset$ 平面 BDM,$BM\subset$ 平面 BDM,　……5 分

∴ $C_1M\perp$ 平面 BDM.　……6 分

(Ⅱ)以 D 为坐标原点,$\overrightarrow{DA}$,$\overrightarrow{DC}$,$\overrightarrow{DD_1}$ 的方向分别为 x 轴,y 轴,z 轴正方向,建立如图所示的空间直角坐标系 $Dxyz$. 则 $D(0,0,0)$,$M(2,0,2)$,$B(2,2,0)$,$C_1(0,2,4)$,

$\overrightarrow{DB}=(2,2,0)$,$\overrightarrow{DM}=(2,0,2)$,$\overrightarrow{DC_1}=(0,2,4)$.　……7 分



设平面 DBM 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$.

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DM}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}2x_1+2y_1=0,\\ 2x_1+2z_1=0.\end{cases}$

令 $z_1=1$,得 $\boldsymbol{n}=(-1,1,1)$.　……8 分

设平面 DBC_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_2,y_2,z_2)$.

由 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DB}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DC_1}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}2x_2+2y_2=0,\\ 2y_2+4z_2=0.\end{cases}$

令 $z_2=1$,得 $\boldsymbol{m}=(2,-2,1)$.　……9 分

∴ $\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\dfrac{-3}{\sqrt{3}\times 3}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.　……11 分

由二面角 C_1-BD-M 为锐角,

∴所求二面角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.　……12 分

18. **解**:(Ⅰ)由列联表数据可得，

$K^2=\dfrac{200\times(60\times80-40\times20)^2}{100\times100\times120\times80}=\dfrac{100}{3}\approx33.333>10.828.$ ……4 分

∴有 99.9%的把握认为该校高一年级体育模块化课程的选择与性别有关. ……5 分

(Ⅱ)随机变量 X 的取值可能为 0,1,2.

∵ $P(X=0)=\dfrac{C_3^0C_3^2}{C_6^2}=\dfrac{1}{5}$，$P(X=1)=\dfrac{C_3^1C_3^1}{C_6^2}=\dfrac{3}{5}$，$P(X=2)=\dfrac{C_3^2C_3^0}{C_6^2}=\dfrac{1}{5}$，

……9 分

∴ X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\dfrac{1}{5}$	$\dfrac{3}{5}$	$\dfrac{1}{5}$

……10 分

$E(X)=0\times\dfrac{1}{5}+1\times\dfrac{3}{5}+2\times\dfrac{1}{5}=1.$ ……12 分

19. **解**:(Ⅰ) $f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x+2\cos^2x-1=\sqrt{3}\sin2x+\cos2x=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{6}).$

……2 分

由 $f(A)=2\sin(2A+\dfrac{\pi}{6})=1$，即 $\sin(2A+\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{1}{2}$.

∵$\triangle ABC$ 为锐角三角形，$2A+\dfrac{\pi}{6}\in(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{7\pi}{6})$，

∴$2A+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{5\pi}{6}$.

∴$A=\dfrac{\pi}{3}$. ……4 分

(Ⅱ)∵$b=1$，由余弦定理，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=c^2-c+1$.

∴$2a^2+bc=2c^2-c+2$. ……6 分

由正弦定理，$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$.

∴$c=\dfrac{\sin C}{\sin B}=\dfrac{\sin(\dfrac{2\pi}{3}-B)}{\sin B}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\dfrac{1}{2}\sin B}{\sin B}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\tan B}+\dfrac{1}{2}$. ……8 分

∵$\triangle ABC$ 是锐角三角形，

∴$0<B<\dfrac{\pi}{2}$，且 $C=\dfrac{2\pi}{3}-B<\dfrac{\pi}{2}$.

∴$B\in(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2})$，$\tan B\in(\dfrac{\sqrt{3}}{3},+\infty)$.

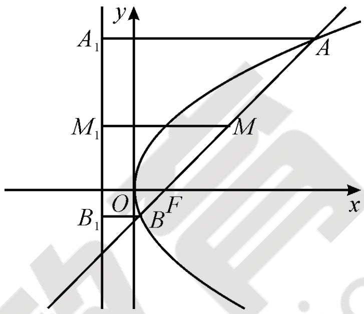
∴$c=\dfrac{\sqrt{3}}{2\tan B}+\dfrac{1}{2}\in(\dfrac{1}{2},2)$. ……10 分

∴$2a^2+bc=2c^2-c+2\in(2,8)$.

综上，$2a^2+bc$ 的取值范围为 $(2,8)$.　　　　……12 分

20. **解**：(Ⅰ)如图，取 AB 的中点 M，分别过 A,B,M 作准线的垂线，依次交准线于 A_1,B_1,M_1.　　　　……1 分

$\because |AA_1|=|AF|,|BB_1|=|BF|,|MM_1|=\frac{1}{2}(|AA_1|+|BB_1|)$,　　　　……2 分



$\therefore |MM_1|=\frac{1}{2}(|AF|+|BF|)=\frac{|AB|}{2}$.　　　　……3 分

$\therefore$ 以 AB 为直径的圆和直线 $x=-1$ 相切.　　　　……4 分

(Ⅱ)设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$.

由 $\begin{cases} y=x+m, \\ y^2=4x \end{cases}$ 消去 x，得 $y^2-4y+4m=0$.

由 $\Delta=16-16m>0$，得 $m<1$.

$\therefore y_1+y_2=4,\ y_1y_2=4m$.　　　　……6 分

由△ FPQ 的面积 $S=\frac{1}{2}\cdot|PQ|\cdot d=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1+1}\cdot|y_1-y_2|\cdot\frac{|1+m|}{\sqrt{2}}$,　　　　……7 分

$\therefore |1+m|\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=4$.

$\therefore |1+m|\sqrt{16-16m}=4$，即 $m(m^2+m-1)=0$.　　　　……9 分

$\because m<1$,

$\therefore m=0$ 或 $m=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.　　　　……11 分

$\therefore$ 直线 l_2 的方程为 $y=x$ 或 $y=x+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 或 $y=x+\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.　　　　……12 分

21. **解**：(Ⅰ) $\because f'(x)=2e^x-a$.　　　　……1 分

若 $a\leqslant 0$，则 $f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增；　　　　……2 分

若 $a>0$,

当 $x\in(-\infty,\ln\frac{a}{2})$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

当 $x\in(\ln\frac{a}{2},+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.　　　　……3 分

综上，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增；

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,\ln\frac{a}{2})$ 上单调递减，在 $(\ln\frac{a}{2},+\infty)$ 上单调递增.　　　　……4 分

(Ⅱ)当 $a=e$ 时，要 $2e^x-ex>e(1-\cos x)$ 成立.

即证 $2e^{x-1}>x+1-\cos x$ 成立，

①当 $x\leqslant 0$ 时，设函数 $k(x)=x+1-\cos x$，

$\therefore k'(x)=1+\sin x\geqslant 0$,

$\therefore k(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递增.

$\therefore k(x) \leqslant k(0)=0$.

$\therefore 2e^{x-1}>0 \geqslant x+1-\cos x$ 成立. ……7 分

②当 $x>0$ 时,要证 $2e^{x-1}>x+1-\cos x$ 成立,

即证 $2e^{x-1}-2x>1-\cos x-x$.

设函数 $h(x)=2e^{x-1}-2x(x>0)$,

$\therefore h'(x)=2e^{x-1}-2$,

由 $h'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,且 $h'(1)=0$.

$\therefore$ 当 $x \in(0,1)$,$h'(x)<0$,$h(x)$ 单调递减;

当 $x \in(1,+\infty)$,$h'(x)>0$,$h(x)$ 单调递增.

$\therefore h(x) \geqslant h(1)=0$. ……9 分

设函数 $g(x)=1-\cos x-x(x>0)$,

$\therefore g'(x)=\sin x-1 \leqslant 0$.

$\therefore$ $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

$\therefore g(x)<g(0)=0$.

$\therefore h(x) \geqslant 0>g(x)$,上式得证. ……11 分

综上所述,$f(x)>e(1-\cos x)$ 成立. ……12 分

22.**解**:(Ⅰ)$\because$ 当 $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ 时,直线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=2+\dfrac{1}{2}t, \\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$, ……1 分

化简得直线 C_1 的普通方程为 $\sqrt{3}x-y-2\sqrt{3}=0$. ……3 分

(Ⅱ)$\because$ 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2\cos 2\theta=2$,

$\therefore \rho^2\cos^2\theta-\rho^2\sin^2\theta=2$. ……4 分

$\because x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$,

$\therefore$ 曲线 C_2 的普通方程为 $x^2-y^2=2$. ……5 分

将直线 C_1 的参数方程 $\begin{cases} x=2+t\cos\alpha, \\ y=t\sin\alpha \end{cases}$ 代入 $x^2-y^2=2$ 得 $t^2\cos 2\alpha+4t\cos\alpha+2=0$.

$\therefore \cos 2\alpha \neq 0$,可得 $\alpha \neq \dfrac{\pi}{4}$,$\Delta=16\cos^2\alpha-8\cos 2\alpha=8>0$.

设 A,B 两点对应的参数分别为 t_1, t_2,则 $t_1+t_2=-\dfrac{4\cos\alpha}{\cos 2\alpha}$,$t_1t_2=\dfrac{2}{\cos 2\alpha}$. ……7 分

$\therefore |PA|\cdot|PB|=|t_1t_2|=\left|\dfrac{2}{\cos 2\alpha}\right|=4$. ……8 分

$\because 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$,

$\therefore \alpha=\dfrac{\pi}{6}$ 或 $\dfrac{\pi}{3}$. ……10 分

23.**解**:(Ⅰ)当 $a=4$ 时,$f(x)=|2x-4|+|x+1|$. ……1 分

①当 $x \geqslant 2$ 时,$f(x)=3x-3 \geqslant 7$,解得 $x \geqslant \dfrac{10}{3}$; ……2 分

②当 $x \leqslant -1$ 时，$f(x)=3-3x \geqslant 7$，解得 $x \leqslant -\frac{4}{3}$； ……3 分

③当 $-1<x<2$ 时，$f(x)=-x+5 \geqslant 7$，解得 $x \leqslant -2$，不合题意. ……4 分

综上，不等式 $f(x) \geqslant 7$ 的解集为 $(-\infty,-\frac{4}{3}] \cup [\frac{10}{3},+\infty)$. ……5 分

(Ⅱ)由题，①当 $a<0$ 时，$f(x)>2a$ 显然成立. ……6 分

②当 $a \geqslant 0$ 时，$f(x)=|2x-a|+|x+1|=\begin{cases} -3x+a-1, x \leqslant -1, \\ -x+a+1, -1<x<\frac{a}{2}, \\ 3x-a+1, x \geqslant \frac{a}{2}. \end{cases}$

……7 分

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,-1]$ 单减，在 $(-1,\frac{a}{2})$ 单减，在 $[\frac{a}{2},+\infty)$ 单调递增.

$\therefore f(x)_{\min}=f(\frac{a}{2})=\frac{a}{2}+1$. ……8 分

由 $f(x)>2a$ 恒成立，故 $f(x)_{\min}=\frac{a}{2}+1>2a$，解得 $a<\frac{2}{3}$.

$\therefore 0 \leqslant a<\frac{2}{3}$. ……9 分

综上，a 的取值范围为 $(-\infty,\frac{2}{3})$. ……10 分