甘孜州普通高中 2024 届第一次诊断考试
理科数学·参考答案

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的。

1．B 2．D 3．D 4．B 5．C 6．A 7．B 8．A 9．A 10．C

11．D 12．B

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。将答案填在答题卡相应的横线上。

13．1 14．-6 15． $y=ex-e$ 16． $\frac{52\pi}{3}$

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）解：（1）2×2 列联表补充如下：

	选物理类	选历史类	合计
男生	40	15	55
女生	20	25	45
合计	60	40	100

由 $K_2\frac{100\times(40\times25-20\times15)^2}{60\times40\times55\times45}\approx8.249>6.635$

故有 99%的把握认为选科分类与性别有关联

（2）由已知，选择物理类的学生共 60 人，男女比例为 2:1，

因此抽取 6 名学生中，男生 4 人，女生 2 人；所以随机变量 X 的取值为 0，1，2.

$$P(X=0)=\frac{C_2^0C_4^2}{C_6^2}=\frac{2}{5},P(X=1)=\frac{C_2^1C_4^1}{C_6^2}=\frac{8}{15},P(X=2)=\frac{C_2^2C_4^0}{C_6^2}=\frac{1}{15}$$

所以随机变量 X 的分布列如下表：

X	0	1	2
P	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

故： $E(X)=0\times\frac{2}{5}+1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{1}{15}=\frac{2}{3}$

18．（12 分）

解：(1)选①：由 $a\cos C+c\cos A=2b\cos B$ 得 $\sin A\cos C+\sin C\cos A=2\sin B\cos B$

即，$\sin(A+C)=2\sin B\cos B\Rightarrow\sin B=2\sin B\cos B\Rightarrow\cos B=\frac{1}{2}$

$\because B\in(0,\pi)\therefore B=\frac{\pi}{3}$

选②：由正弦定理得 $\frac{a-c}{a+b}=\frac{a-b}{c}$，即 $ac-c^2=a^2-b^2\Rightarrow a^2+c^2-b^2=ac$

由余弦定理得 $\cos B=\frac{1}{2}\because B\in(0,\pi)\therefore B=\frac{\pi}{3}$

选③：由 $b\cos C+\sqrt{3}b\sin C-a-c=0$ 得 $\sin B\cos C+\sqrt{3}\sin B\sin C-\sin A-\sin C=0$

则 $\sin B\cos C+\sqrt{3}\sin B\sin C-\sin(B+C)-\sin C=0$

即 $\sqrt{3}\sin B\sin C-\cos B\sin C-\sin C=0$ 则 $\sqrt{3}\sin B-\cos B-1=0$，

解得 $2\sin\left(B-\frac{\pi}{6}\right)=1$，即 $\sin\left(B-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\because B\in(0,\pi)$，$\therefore B-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$，

$\therefore B-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，故 $B=\frac{\pi}{3}$

（2）因为 $AD=3DC$ 所以 $\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{DC}$，所以 $\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BA}=3\left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BD}\right)$，

所以 $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$，

平方得：$9=\frac{1}{16}\overrightarrow{BA}^2+\frac{9}{16}\overrightarrow{BC}^2+\frac{3}{8}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ 故 $9=\frac{1}{16}c^2+\frac{9}{16}a^2+\frac{3}{16}ac$

由基本不等式可得，$9\geq\frac{3}{8}ac+\frac{3}{16}ac=\frac{9}{16}ac$ 故，$ac\leq16$

当且仅当 a=4，c=12，$a=\frac{4\sqrt{3}}{3},c=4\sqrt{3}$ 时等号成立，

故面积 $S=\frac{1}{2}ac\sin\frac{\pi}{3}\leq4\sqrt{3}$，故面积的最大值为：$4\sqrt{3}$

19．（12 分）

解：（1）由 $CF//AE$，$CF\not\subset$ 平面 ADE，$AE\subset$ 平面 ADE，则 $CF//$ 平面 ADE，

由 $AD//BC$，$BC\not\subset$ 平面 ADE，$AD\subset$ 平面 ADE，则 $BC//$ 平面 ADE，

而 $CF\cap BC=C$，$CF,BC\subset$ 平面 BCF，故平面 $BCF//$ 平面 ADE，

又 $BF\subset$ 平面 BCF，则 $BF//$ 平面 ADE；

（2）$AE\perp$ 平面 $ABCD$，$AB,AD\subset$ 平面 $ABCD$，

则 $AE\perp AB$，$AE\perp AD$，又 $AD\perp AB$，

以 A 为原点，分别以 AB,AC,AE 为 x,y,z 轴构建空间直角坐标系 $A-xyz$，如右图所示：

又 $AB=AD=1$，$AE=BC=2CF=2$，

所以 $B(1,0,0)$，$C(1,2,0)$，$D(0,1,0)$，$E(0,0,2)$，

则 $\overrightarrow{CE}=(-1,-2,2)$，$\overrightarrow{BE}=(-1,0,2)$，$\overrightarrow{DE}=(0,-1,2)$，

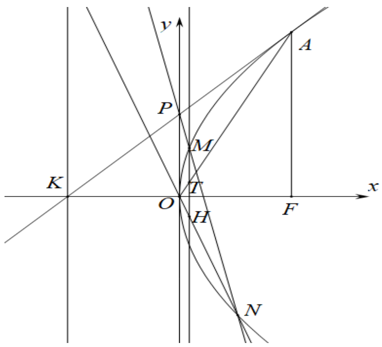
令平面 BDE 的一个法向量 $\vec{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{BE}=-x+2z=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{DE}=-y+2z=0\end{cases}$，

令 $z=1$，则 $x=2,y=2$，即 $\vec{m}=(2,2,1)$，

所以 $\left|\cos\langle\vec{m},\overrightarrow{CE}\rangle\right|=\left|\dfrac{\vec{m}\cdot\overrightarrow{CE}}{|\vec{m}||\overrightarrow{CE}|}\right|=\dfrac{4}{3\times3}=\dfrac{4}{9}$，即直线 CE 与平面 BDE 所成角的正弦值为 $\dfrac{4}{9}$．

20．（12 分）

解：（1）解：设 $B(x_0，y_0)$，$x_0\geq0$，由题意知准线 $l:x=-\dfrac{p}{2},F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$，



由抛物线的定义可知点 B 到点 F 的距离等于点 B 到准线 l 的距离，所以点 B 到点 F 的距离与到直线 $x=-2$ 的距离之和为 $x_0+\dfrac{p}{2}+x_0+2=2x_0+2+\dfrac{p}{2}$，

由题意知当 $x_0=0$ 时，距离之和最小，

所以 $2+\dfrac{p}{2}=3$，解得 $p=2$，所以抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$

（2）由（1）知 K(0,−1)，设 AK：$x=my-1$，联立方程 $\begin{cases}x=my-1\\ y^2=4x\end{cases}$，得 $y^2-4my+4=0$，

由 $\Delta=0$ 得 $m=\pm1$，又与 y 轴交于正半轴，$\therefore m=1,\therefore l$：$y=x+1$ 所以 $P(0,1)$．因为 MN 斜率

存在且不为零，所以设 $MN: y=kx+1(k\neq 0), M(x_1,y_1), N(x_2,y_2)$，联立 $\begin{cases} y^2=4x \\ y=kx+1 \end{cases}$，消去 x，

得 $ky^2-4y+4=0(k\neq 0)$，则 $\Delta=16(1-k)>0$，所以 $k<1$ 且 $k\neq 0, y_1+y_2=y_1y_2=\dfrac{4}{k}$.

又直线 $OA: y=2x$，令 $x=x_1$，得 $y=2x_1$，所以 $T(x_1,2x_1)$，

因为 $\overrightarrow{MT}=\overrightarrow{TH}$，所以 $H(x_1,4x_1-y_1)$，所以 $K_{NH}=\dfrac{y_1+y_2-4x_1}{x_2-x_1}$，

所以直线 NH 的方程为 $y-y_2=\dfrac{y_1+y_2-4x_1}{x_2-x_1}(x-x_2)$，

所以 $y=\dfrac{y_1+y_2-4x_1}{x_2-x_1}x+y_2-\dfrac{x_2(y_1+y_2-4x_1)}{x_2-x_1}=\dfrac{y_1+y_2-4x_1}{x_2-x_1}x+\dfrac{4x_1x_2-x_1y_2-x_2y_1}{x_2-x_1}$，

因为 $4x_1x_2-x_1y_2-x_2y_1=4\times\dfrac{y_1^2}{4}\times\dfrac{y_2^2}{4}-\dfrac{y_1^2}{4}\times y_2-\dfrac{y_2^2}{4}y_1=\dfrac{y_1y_2}{4}\left[y_1y_2-(y_1+y_2)\right]=0$，

所以直线 NH 为 $y=\dfrac{y_1+y_2-4x_1}{x_2-x_1}x$，所以 NH 恒过定点 $(0,0)$.

21.（12 分）

解：（1）$f'(x)=ae^x+axe^x=a(x+1)e^x$，

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)>0$ 得 $x>-1$；令 $f'(x)<0$ 得 $x<-1$，$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递减，在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore f(x)_{极小值}=f(-1)=-\dfrac{a}{e}$

当 $a<0$ 时，令 $f'(x)>0$ 得 $x<-1$；令 $f'(x)<0$ 得 $x>-1$，

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递增，在 $(-1,+\infty)$ 上单调递减，$\therefore f(x)_{极大值}=f(-1)=-\dfrac{a}{e}$

（2）记 $g(x)=f(x)-\sin x-\cos x+1=axe^x-\sin x-\cos x+1$，

即 $g(x)\geq 0$ 在 $\left(-\frac{\pi}{4}, +\infty\right)$ 上恒成立

$g'(x)=a(x+1)e^x-\cos x+\sin x$

必要性：由于 $g(0)=0$，又 $g(x)\geq 0$ 恒成立，那么说明 $g(0)$ 是 $g(x)$ 的一个最小值，

又 $x\in\left(-\dfrac{\pi}{4},+\infty\right)$，则 $g(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值，故 $g'(0)=0$，得 $a=1$

充分性：下面证 $a=1$ 时原式恒成立，即证 $g(x)=xe^x+1-(\sin x+\cos x)\geq 0$

$g'(x)=(x+1)e^{x}-\cos x+\sin x, g'(0)=0, g''(x)=(x+2)e^{x}+\cos x+\sin x$

当 $x\geq 0$时，$g''(x)=(x+2)e^{x}+\cos x+\sin x\geq 2+\cos x+\sin x>0$，

$\therefore g'(x)$ 单调递增，$\therefore g'(x)\geq g'(0)=0$，

$\therefore g(x)$在$[0，+\infty)$上单调递增，$\therefore g(x)\geq g(0)=0$ 成立；

当 $x\in\left(-\frac{\pi}{4}，0\right)$时，$g''(x)=(x+2)e^{x}+\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})>0$，

$\therefore g'(x)$ 在 $x\in\left(-\frac{\pi}{4}，0\right)$上单调递增，$\therefore g'(x)<g'(x)=0$，

$\therefore g(x)$在$\left(-\frac{\pi}{4}，0\right)$上单调递减，$\therefore g(x)>g(0)=0$ 成立

综上：当 $a=1$ 时 $g(x)=xe^{x}+1-(\sin x+\cos x)\geq 0$成立

$\therefore a$ 的取值范围为 $a=1$

选做题

22.（10 分）

解：（1）由题得$\begin{cases}\frac{x}{2}=\cos\alpha\\ \frac{y}{3}=\sin\alpha\end{cases}$，所以C 的普通方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$；

由$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$得 l 的直角坐标方程为：$-2x+y+2=0$

（2）因为$\begin{cases}x'=\frac{1}{2}x\\ y'=\frac{1}{3}y\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}x=2x'\\ y=3y'\end{cases}$带入曲线 C 的普通方程得曲线 M：$x^2+y^2=1$，易知

点 P 在直线 l 上，直线 l 的参数方程为：$\begin{cases}x=3+\frac{\sqrt{5}}{5}g\\ y=4+\frac{2\sqrt{5}}{5}t\end{cases}$ (t 为参数)代入曲线 M 得：

$t^2+\frac{22\sqrt{5}}{5}t+24=0$

记 t_1，t_2分别为 A、B 两点所对应得参数，则 $t_1+t_2=-\frac{22\sqrt{5}}{5}, t_1\cdot t_2=24$；

$\therefore |PA|\cdot|PB|=|t_1\cdot t_2|=24$

23．（10 分）

【详解】（1）解：由 $f(x)<x$ 得 $|x-1|+|x-2|<x$，

可得 $\begin{cases}x<1\\3-2x<x\end{cases}$ 或 $\begin{cases}1\le x\le 2\\1<x\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x>2\\2x-3<x\end{cases}$，

分别解得 $x\in\varnothing$ 或 $1<x\le 2$ 或 $2<x<3$，

综上可得不等式 $f(x)<x$ 的解集为 $(1,3)$.

（2）解：由题意知 $f(x)=|x-1|+|x-2|=\begin{cases}3-2x, x<1\\1, 1\le x\le 2\\2x-3, x>2\end{cases}$，

易知，$f(x)$ 的最小值 $M=1$，

则 $\frac{a+1}{2(a+2)}+\frac{b-1}{b+1}=1$，所以 $1-\frac{1}{a+2}+2-\frac{4}{b+1}=2$，即 $\frac{1}{a+2}+\frac{4}{b+1}=1$.

因为 $a>0$，$b>0$，所以令 $m=a+2>2$，$n=b+1>1$，则 $\frac{1}{m}+\frac{4}{n}=1$，

所以

$$\begin{aligned}a+b&=m+n-3=(m+n)\left(\frac{1}{m}+\frac{4}{n}\right)-3\\&=\left(5+\frac{4m}{n}+\frac{n}{m}\right)-3\ge 5+2\sqrt{\frac{4nm}{nm}}-3=(5+4)-3=6\end{aligned},$$

当且仅当 m=3，n=6，即 a=1，b=5 时等号成立.