甘孜州普通高中2024届第一次诊断考试
理科数学

（满分150分，120分钟完卷）

注意事项：

1. 答题前，考生务必先将自己的姓名、班级、准考证号填写在答题卡上相应位置，并把条形码粘贴至条形码粘贴栏。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，用0.5mm黑色签字笔将答案写在答题卡上，在本试卷上答题无效。

3. 考试结束后，将答题卡交回。

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的。

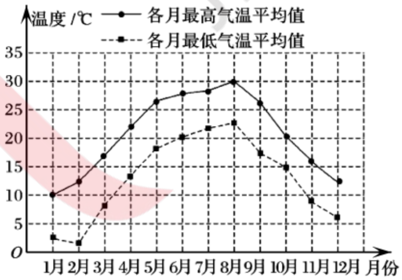
1．已知集合 $A=\{x|x^2-2x-3<0,\ x\in N\}$，集合 $B=\{-1,0,1\}$，则 $A\cup B$（▲）

A．$\{0,1\}$　　B．$\{-1,0,1,2\}$　　C．$\{-1,1\}$　　D．$\{-2,-1,0,1\}$

2．已知复数 z 满足 $\dfrac{z+i}{z-1}=i$，则复数 z 对应的点在（▲）

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

3．某市气象部门根据2022年各月的每天最高气温平均值与最低气温平均值（单位：℃）数据，绘制折线图：那么，下列叙述错误的是（▲）



A．2022年2—8月气温逐渐上升

B．全年中各月最低气温平均值不高于10℃的月份有5个

C．全年中，2月份的最高气温平均值与最低气温平均值的差值最大

D．从2022年7月至12月该市每天最高气温平均值与最低气温平均值都呈下降趋势

4．已知平面向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 满足 $|\vec{b}|=2|\vec{a}|=2$，若 $\vec{a}\perp(\vec{a}-\vec{b})$，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为（▲）

A．$\dfrac{\pi}{6}$　　B．$\dfrac{\pi}{3}$　　C．$\dfrac{2\pi}{3}$　　D．$\dfrac{5\pi}{6}$

5．某工厂生产了一批产品，需等待检测后才能销售。检测人员从这批产品中随机抽取了 5 件产品来检测，现已知这 5 件产品中有 3 件正品，2 件次品，从中不放回地取出产品，每次 1 件，共取两次．已知第一次取得次品，则第二次取得正品的概率是（▲）

A．$\frac{1}{4}$　　B．$\frac{1}{3}$　　C．$\frac{3}{4}$　　D．$\frac{2}{3}$

6．已知$\{a_n\}$是公差为 2 的等差数列，且a_1，a_2，a_5成等比数列，则S_7等于（▲）

A．49　　B．48　　C．64　　D．108

7．已知圆C：$x^2+y^2-6x+5=0$与中心在原点、焦点在x轴上的双曲线D的一条渐近线相切，则双曲线D的离心率为（▲）

A．$\frac{3}{2}$　　B．$\frac{3\sqrt{5}}{5}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．$\frac{\sqrt{6}}{2}$

8．设$p:\log_2(x-1)<m$；$q:\frac{2}{x}>1$．若 p 是q的充分不必要条件，则m的取值范围是（▲）

A．$(-\infty,0]$　　B．$[0,+\infty)$　　C．$[-1,+\infty)$　　D．$(-\infty,-1]$

9．已知函数$f(x)=A\cos(2x+\varphi)(A>0,|\varphi|<\pi)$是奇函数，且$f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-1$，将$f(x)$的图象上所有点的横坐标变为原来的$\frac{1}{2}$倍，纵坐标不变，所得图象对应的函数为$g(x)$，则（▲）

A．$g(x)=\sin 4x$　　B．$g(x)=\sin x$

C．$g(x)=\cos\left(4x+\frac{\pi}{4}\right)$　　D．$g(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

10．在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=\sqrt{3}$，$BC=1$，M,N分别是为AD_1和C_1D_1的中点，MN与平面BB_1C_1C所成的角为30°，则该长方体的体积为（▲）

A．$8\sqrt{2}$　　B．6　　C．$2\sqrt{6}$　　D．$8\sqrt{3}$

11．已知曲线C是焦点在x轴上的椭圆，曲线 C 的左焦点为F，上顶点为B，右顶点为A，过点F作x轴垂线，该垂线与直线AB交点为M，若$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{BM}$且$\Delta AFM$的面积为$9\sqrt{3}$，则曲线$C$的标准方程为（▲）

A．$\frac{x^2}{2}+y^2=1$　　B．$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$　　C．$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{6}=1$　　D．$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$

12．已知定义域为R 的函数$f(x)$，导函数为$f'(x)$，满足$f'(x)-2f(x)<0$，$f(0)=1$，则（▲）

A．$e^2f(-1)<1$　　B．$f\left(\frac{1}{2}\right)<e$　　C．$f(1)>e^2$　　D．$f(1)>ef\left(\frac{1}{2}\right)$

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。将答案填在答题卡相应的横线上。

13．若 x，y 满足 $\begin{cases} x+y-1\ge 0 \\ x-y-1\le 0 \\ y-1\le 0 \end{cases}$，则 $z=-2x+y$ 的最大值为__▲__.

14．$\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中，含 x^{-4} 的项的系数是__▲__.

15．设 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数，若 $f(x)=xe^x-f'(1)x$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,\ f(1))$ 处的切线方程为__▲__.

16．已知三棱锥 $P-ABC$，$PA\perp$ 面 ABC，$PA=2\sqrt{3}$，在底面 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，$BC=2$，则此三棱锥的外接球的表面积为__▲__.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）四川省从 2022 年开始实行新课标新高考改革，选科分类是川内高中在校学生生涯规划的重要课题，某高级中学为了解学生选科分类是否与性别有关，在该校随机抽取 100 名学生进行调查.统计整理数据得到如下的 2×2 列联表：

	选物理类	选历史类	合计
男生	40		55
女生		25	
合计	60		100

（1）判断是否有 99%的把握认为选科分类与性别有关联？

（2）在以上随机抽取的选择物理类的学生中，按不同性别同比例分层抽样，共抽取 6 名学生进行问卷调查，然后在被抽取的 6 名学生中再随机抽取 2 名学生进行面对面访谈.求至少抽中一名女生得概率.

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$.

$P(K^2\ge k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

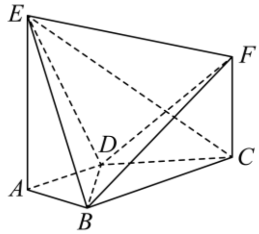
18．（12 分）已知① $a\cos C+c\cos A=2b\cos B$，② $\dfrac{a-c}{\sin A+\sin B}=\dfrac{a-b}{\sin C}$，③ $b\cos C+\sqrt{3}b\sin C-a-c=0$，从上述三个条件中任选一个补充到下面问题中，并解答下列问题. 在△ABC 中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，并且满足__▲__.

（1）求角 B；

（2）D 是边 AC 上一点，且 $AD=3DC$，$BD=3$，求△ABC 面积的最大值.

19.（12 分）如图，$AE\perp$平面 $ABCD$，$CF//AE$，$AD//BC$，$AD\perp AB$，

$AB=AD=1$，$AE=BC=2CF=2$.



（1）求证：$BF//$平面 ADE；

（2）求直线 CE 与平面 BDE 所成角的正弦值.

20.（12 分）在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 E:$y^2=2px$($p>0$)的焦点为 F, E 的准线 l 交 x 轴于点 K，过 K 的直线 l 与抛物线 E 相切于点 A，且交 y 轴正半轴于点 P. 已知 E 上的动点 B 到点 F 的距离与到直线 $x=-2$ 的距离之和的最小值为 3.

（1）求抛物线 E 的方程；

（2）过点 P 的直线交 E 于 M, N 两点，过 M 且平行于 y 轴的直线与线段 OA 交于点 T，点 H 满足 $\overrightarrow{MT}=\overrightarrow{TH}$. 证明：直线 HN 过定点.

21.（12 分）已知函数 $f(x)=axe^x$，其中 $a\neq 0$，

（1）求函数 $f(x)$ 的极值；

（2）当 $x\in\left(-\dfrac{\pi}{4},+\infty\right)$时，$f(x)\geq\sin x+\cos x-1$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

选做题：请考生在 22、23 两题中任选一题作答，只能做所选定的题目。如果多做，则按所做第一个题目计分，作答时，请用 2B 铅笔在答题卡上将所选题号后的方框涂黑。

22.（10 分）直角坐标系 xOy 中，曲线 $C:\begin{cases}x=2\cos\alpha\\ y=3\sin\alpha\end{cases}$ (α 为参数)，在以 O 为极点，x 轴正半轴为极轴的极坐标系中，直线 $l:\rho\sin\theta-2\rho\cos\theta=-2$

（1）求 C 的普通方程和 l 的直角坐标方程；

（2）设曲线 C 经过伸缩变换$\begin{cases}x'=\dfrac{1}{2}x\\ y'=\dfrac{1}{3}y\end{cases}$，得到曲线 M，设点 $P(3,4)$，记直线 l 与曲线 M 交于 A, B 两点，求 $|PA|\cdot|PB|$ 的值.

23.（10 分）已知函数 $f(x)=|x-1|+|x-2|$.

（1）求不等式 $f(x)<x$ 的解集；

（2）设 $f(x)$ 的最小值为 M，若正实数 a,b 满足 $\dfrac{a+1}{2(a+2)}+\dfrac{b-1}{b+1}=M$，证明：$a+b\geq 6$.