甘孜州普通高中 2024 届第一次诊断考试
文科数学·参考答案

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的。

1．D　2．B　3．D　4．C　5．C　6．C　7．A　8．B　9．D　10．A

11．B　12．B

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。将答案填在答题卡相应的横线上。

13．1　14．3　15．$y=ex-e$　16．$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）

解：（1）2×2 列联表补充如下：

	选物理类	选历史类	合计
男生	40	15	55
女生	20	25	45
合计	60	40	100

由 $K_2 \frac{100\times(40\times25-20\times15)^2}{60\times40\times55\times45}\approx8.249>6.635$

故有 99%的把握认为选科分类与性别有关联

（2）由已知，选择物理类的学生共 60 人，男女比例为 2：1，

因此抽取 6 名学生中，男生 4 人，女生 2 人；4 名男生分别记为 A、B、C、D，2 名女生记为 a、b；则可能的抽取方式有：AB，AC，AD，BC，BD，CD，Aa，Ba，Ca，Da，Ab，Bb，Cb，Db，ab；一共 15 种，故至少抽中一名女生的概率 P= $\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$

18．（12 分）

解：（1）选①：由 $a\cos C+c\cos A=2b\cos B$

得 $\sin A\cos C+\sin C\cos A=2\sin B\cos B$

即，$\sin(A+C)=2\sin B\cos B\Rightarrow\sin B=2\sin B\cos B\Rightarrow\cos B=\frac{1}{2}$

$\because B\in(0,\pi)\therefore B=\frac{\pi}{3}$

选②：由正弦定理得 $\frac{a-c}{a+b}=\frac{a-b}{c}$，即 $ac-c^2=a^2-b^2\Rightarrow b^2+c^2-a^2=ab$

由余弦定理得 $\cos B=\frac{1}{2}\because B\in(0,\pi)\therefore B=\frac{\pi}{3}$

选③：由 $b\cos C+\sqrt{3}b\sin C-a-c=0$ 得 $\sin B\cos C+\sqrt{3}\sin B\sin C-\sin A-\sin C=0$

则 $\sin B\cos C+\sqrt{3}\sin B\sin C-\sin(B+C)-\sin C=0$

即 $\sqrt{3}\sin B\sin C-\cos B\sin C-\sin C=0$ 则 $\sqrt{3}\sin B-\cos B-1=0$，

解得 $2\sin\left(B-\frac{\pi}{6}\right)=1$，即 $\sin\left(B-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\because B\in(0,\pi)$，$\therefore B-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$，

$\therefore B-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，故 $B=\frac{\pi}{3}$

（2）由 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BCD}$，得 $\frac{1}{2}ac\sin 60^\circ=\frac{1}{2}c\cdot BD\cdot\sin 30^\circ+\frac{1}{2}a\cdot BD\cdot\sin 30^\circ$，

即 $\sqrt{3}ac=2(a+c)$①．由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，

所以 $a^2+c^2-ac=9$②．

由①②得 $ac=-2$（舍去）或 $ac=6$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{3\sqrt{3}}{2}$．

19．（12 分）

解：（1）由 $CF//AE$，$CF\not\subset$ 平面 ADE，$AE\subset$ 平面 ADE，则 $CF//$ 平面 ADE，

由 $AD//BC$，$BC\not\subset$ 平面 ADE，$AD\subset$ 平面 ADE，则 $BC//$ 平面 ADE，

而 $CF\cap BC=C$，$CF,BC\subset$ 平面 BCF，故平面 $BCF//$ 平面 ADE，

又 $BF\subset$ 平面 BCF，则 $BF//$ 平面 ADE；

（2）由题可知：$CF\perp$ 面 $ABCD$，$\therefore CF\perp AB$，又易知 $AB\perp BC$，$BC\cap CF=C$，

$\therefore AB\perp$ 面 BCF，$\therefore AB\perp BF$，

在直角三角形 BCF 中，$BF=\sqrt{BC^2+CF^2}=\sqrt{5}$，$\therefore S_{\Delta ABF}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BF=\frac{\sqrt{5}}{2}$

$S_{\Delta ABD}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AD=\frac{1}{2}$　又 $V_{F-ABD}=\frac{1}{3}\cdot S_{\Delta ABD}\cdot CF=\frac{1}{6}$，

$\therefore V_{F-ABD}=V_{D-ABF}=\frac{1}{3}\cdot S_{\Delta ABF}\cdot d=\frac{1}{6}$　$\therefore d=\frac{\sqrt{5}}{5}$

所以点 D 到平面 ABF 的距离$\frac{\sqrt{5}}{5}$

20.（12 分）

解：（1）由 $f(x)=ax-\ln x$ 得 $f'(x)=a-\frac{1}{x}(x>0)$，

当 $a\le 0$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0,+\infty)$，无增区间；

当 $a>0$ 时，$f'(x)=a-\frac{1}{x}=\frac{a\left(x-\frac{1}{a}\right)}{x}(x>0)$，令 $f'(x)<0$，

则 $0<x<\frac{1}{a}$，令 $f'\ \ x\ \ >0$，则 $x>\frac{1}{a}$，

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$，单调递增区间是 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$.

综上，当 $a\le 0$ 时，$f(x)$ 的单调递减区间为 $(0,+\infty)$，无增区间；

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 的单调递减区间为 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$，单调递增区间是 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$.

（2）因为 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值时，所以 $f'(1)=0$ 且 $a>0$，即 $\frac{a\left(1-\frac{1}{a}\right)}{1}=0$，

解得 $a=1$，

则 $f(x)=x-\ln x$，关于 x 的方程 $f(x)=x^2-2x+b$

即 $x^2-3x+\ln x+b=0$ 在 $\left[\frac{1}{2},2\right]$ 上恰有两个不同的实数根，

令 $g(x)=x^2-3x+\ln x+b$（$x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$），则

$g'(x)=2x-3+\frac{1}{x}=\frac{2x^2-3x+1}{x}=\frac{(2x-1)(x-1)}{x}$，

令 $g'(x)=0$，解得 $x=\frac{1}{2}$ 或 $x=1$，令 $g'(x)>0$，解得 $1<x\le 2$，

此时函数 $g(x)$ 单调递增，

令 $g'(x)<0$，解得 $\frac{1}{2}\le x<1$，此时函数 $g(x)$ 单调递减，

因为 $x^2-3x+\ln x+b=0$ 在 $\left[\frac{1}{2},2\right]$ 上恰有两个不同的实数根，

所以函数 $g(x)=x^2-3x+\ln x+b$ 在 $\left[\frac{1}{2},2\right]$ 上恰有两个不同的零点，

则 $\begin{cases} g\left(\frac{1}{2}\right)\geq 0 \\ g(1)<0 \\ g(2)\geq 0 \end{cases}$，即 $\begin{cases} b-\frac{5}{4}-\ln 2\geq 0 \\ b-2<0 \\ b-2+\ln 2\geq 0 \end{cases}$，解得 $\frac{5}{4}+\ln 2\leq b<2$.

21.（12 分）

解：（1）解：设B(x_0，y_0)，$x_0\geq 0$，由题意知准线 $l:x=-\frac{p}{2},F\left(\frac{p}{2},0\right)$，

由抛物线的定义可知点 B 到点 F 的距离等于点 B 到准线 l 的距离，

所以点 B 到点 F 的距离与到直线 $x=-2$ 的距离之和为 $x_0+\frac{p}{2}+x_0+2=2x_0+2+\frac{p}{2}$，

由题意知当 $x_0=0$ 时，距离之和最小，

所以 $2+\frac{p}{2}=3$，解得 $p=2$，所以抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$

（2）由（1）知 K(0,−1)，设 AK：$x=my-1$，联立方程 $\begin{cases} x=my-1 \\ y^2=4x \end{cases}$，得 $y^2-4my+4=0$，

由 $\Delta=0$ 得 $m=\pm 1$，又与 y 轴交于正半轴，$\therefore m=1$，∴l：y=x+1 所以 $P(0,1)$.

因为 MN 斜率存在且不为零，所以设 $MN:y=kx+1(k\neq 0),M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，

联立 $\begin{cases} y^2=4x \\ y=kx+1 \end{cases}$，消去 x，得 $ky^2-4y+4=0(k\neq 0)$，则 $\Delta=16(1-k)>0$，

所以 $k<1$ 且 $k\neq 0, y_1+y_2=y_1y_2=\frac{4}{k}$.

又直线 $OA:y=2x$，令 $x=x_1$，得 $y=2x_1$，所以 $T(x_1,2x_1)$，

因为 $\overline{MT}=\overline{TH}$，所以 $H(x_1,4x_1-y_1)$，所以 $K_{NH}=\frac{y_1+y_2-4x_1}{x_2-x_1}$，

所以直线 NH 的方程为 $y-y_2=\frac{y_1+y_2-4x_1}{x_2-x_1}(x-x_2)$，

所以 $y=\frac{y_1+y_2-4x_1}{x_2-x_1}x+y_2-\frac{x_2(y_1+y_2-4x_1)}{x_2-x_1}=\frac{y_1+y_2-4x_1}{x_2-x_1}x+\frac{4x_1x_2-x_1y_2-x_2y_1}{x_2-x_1}$，

因为$4x_1x_2-x_1y_2-x_2y_1=4\times\frac{y_1^2}{4}\times\frac{y_2^2}{4}-\frac{y_1^2}{4}\times y_2-\frac{y_2^2}{4}y_1=\frac{y_1y_2}{4}\left[y_1y_2-\left(y_1+y_2\right)\right]=0$，

所以直线NH为$y=\frac{y_1+y_2-4x_1}{x_2-x_1}x$，所以$NH$恒过定点$(0,0)$.

选做题

22.（10 分）

解：(1) 由题得$\begin{cases}\frac{x}{2}=\cos\alpha\\ \frac{y}{3}=\sin\alpha\end{cases}$，所以 C的普通方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$；

由$\begin{cases}x=\rho cos\theta\\ y=\rho sin\theta\end{cases}$得 l 的直角坐标方程为：$-2x+y+2=0$

(2) 因为$\begin{cases}x'=\frac{1}{2}x\\ y'=\frac{1}{3}y\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}x=2x'\\ y=3y'\end{cases}$,带入曲线 C 的普通方程得曲线 M：$x^2+y^2=1$，

易知点 P 在直线 l 上，直线 l 的参数方程为:$\begin{cases}x=3+\frac{\sqrt{5}}{5}t\\ y=4+\frac{2\sqrt{5}}{5}t\end{cases}$ (t 为参数)代入曲线 M 得：

$t^2+\frac{22\sqrt{5}}{5}t+24=0$

记 t_1，t_2分别为 A、B 两点所对应得参数，则 $t_1+t_2=-\frac{22\sqrt{5}}{5}$，$t_1\cdot t_2=24$；

$\therefore|PA|\cdot|PB|=|t_1\cdot t_2|=24$

23.（10 分）

【详解】（1）解：由$f(x)<x$得$|x-1|+|x-2|<x$，

可得$\begin{cases}x<1\\ 3-2x<x\end{cases}$或$\begin{cases}1\le x\le 2\\ 1<x\end{cases}$或$\begin{cases}x>2\\ 2x-3<x\end{cases}$，

分别解得$x\in\varnothing$或$1<x\le 2$或$2<x<3$，

综上可得不等式$f(x)<x$的解集为$(1,3)$.

（2）解：由题意知 $f(x)=|x-1|+|x-2|=\begin{cases}3-2x, x<1\\1, 1\le x\le 2\\2x-3, x>2\end{cases}$，

易知，$f(x)$ 的最小值 $M=1$，

则 $\frac{a+1}{2(a+2)}+\frac{b-1}{b+1}=1$，所以 $1-\frac{1}{a+2}+2-\frac{4}{b+1}=2$，即 $\frac{1}{a+2}+\frac{4}{b+1}=1$.

因为 $a>0$，$b>0$，所以令 $m=a+2>2$，$n=b+1>1$，则 $\frac{1}{m}+\frac{4}{n}=1$，

所以

$$a+b=m+n-3=(m+n)\left(\frac{1}{m}+\frac{4}{n}\right)-3$$

$$=\left(5+\frac{4m}{n}+\frac{n}{m}\right)-3\ge 5+2\sqrt{\frac{4nm}{nm}}-3=(5+4)-3=6$$

当且仅当 $m=3$，$n=6$，即 $a=1$，$b=5$ 时等号成立.