乐山市高中 2024 届第一次调查研究考试
理科数学参考答案及评分意见

2023.12

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.

BABCB　　ABDCB　　AD

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $\forall x \in \boldsymbol{Z}$，$x^2 \neq 2x$；　　14. $y=(\mathrm{e}+1)x-1$；

15. $\dfrac{\pi}{2}$；　　16. 1.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分.

17.解：（1）甲得分的中位数为 $\dfrac{80+81}{2}=80.5$；　……………………2 分

乙得分的众数为 78；　……………………4 分

（2）若使用方案一：

$\bar{x}_{甲}=\dfrac{75+75+78+78+80+81+81+83+84+99}{10}=81.4$　……………………5 分

$\bar{x}_{乙}=\dfrac{75+78+78+78+80+80+83+83+85+85}{10}=80.5$　……………………6 分

因为 $\bar{x}_{甲}>\bar{x}_{乙}$，所以甲的得分较高.　……………………7 分

若使用方案二：

$\bar{y}_{甲}=\dfrac{75+78+78+80+81+81+83+84}{8}=80$　……………………8 分

$\bar{y}_{乙}=\dfrac{78+78+78+80+80+83+83+85}{8}\approx 80.6$　……………………9 分

因为 $\bar{y}_{甲}<\bar{y}_{乙}$，所以乙的得分较高.　……………………10 分

方案二更好，因为有一个评委给甲选手评分为99，高出其他评委的评分很多，方案二可以规避个别极端值对平均值的影响，评选结果更公平、更正.　……………………12 分

18.解：（1）$\because a_1=1$，$\therefore b_1=1$.　……………………1 分

$\because 2na_{n+1}=(n+1)a_n$，$\therefore \dfrac{a_{n+1}}{n+1}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{a_n}{n}$，即 $b_{n+1}=\dfrac{1}{2}b_n$.　……………………3 分

又 $\because b_1=1$，$\therefore \{b_n\}$ 是以 1 为首项，以 $\dfrac{1}{2}$ 为公比的等比数列.　……………………5 分

（2）由（1）得 $b_n=1\times(\dfrac{1}{2})^{n-1}=\dfrac{1}{2^{n-1}}$.　……………………6 分

$\therefore a_n=\dfrac{n}{2^{n-1}}$.　……………………7 分

$\therefore S_n=\dfrac{1}{2^0}+\dfrac{2}{2^1}+\dfrac{3}{2^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{2^{n-2}}+\dfrac{n}{2^{n-1}}$　①

$\therefore \dfrac{1}{2}S_n=\dfrac{1}{2^1}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\cdots+\dfrac{n-1}{2^{n-1}}+\dfrac{n}{2^n}$　②　……………………9 分

由①-②得：

$\therefore \dfrac{1}{2}S_n=\dfrac{1}{2^0}+\dfrac{1}{2^1}+\dfrac{1}{2^2}\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}}-\dfrac{n}{2^n}$

$$=\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}.$$ ……………………11 分

$\therefore S_n=4-\frac{n+2}{2^{n-1}}$. ……………………12 分

19.解：（1）E 是 PC 的中点. ……………………1 分

证明：

连结 AC，交 BD 于点 O，连结 OE.

$\because$ 底面 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore O$ 是 AC 的中点. ……………………2 分

$\because PA//$ 平面 EBD，平面 $PAC\cap$ 平面 $BDE=OE$，

$\therefore PA//OE$. ……………………4 分

$\because O$ 是 AC 的中点，

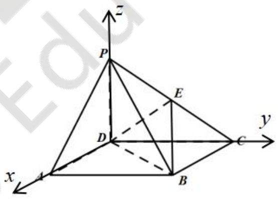
$\therefore E$ 是 PC 的中点. ……………………6 分

（2）解法一：建立如图的空间直角坐标系 $D-xyz$，

令 $CD=a$，平面 PBC 与平面 PDB 所成锐二面角的平面角为 θ，

$\therefore P(0,0,\lambda a)$，$C(0,a,0)$，$A(a,0,0)$，$B(a,a,0)$. ……………………7 分

$\therefore \overrightarrow{CB}=(a,0,0)$，$\overrightarrow{PB}=(a,a,-\lambda a)$.



设平面 PBC 一个法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，

$\because \vec{n}\cdot\overrightarrow{CB}=0$，$\vec{n}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，

即 $\begin{cases}ax=0\\ax+ay-\lambda az=0\end{cases}$，

$\therefore \vec{n}=(0,\lambda,1)$. ……………………9 分

又易知 $AC\perp$ 平面 PDB，

$\therefore$ 平面 PDB 的一个法向量 $\overrightarrow{CA}=(1,-1,0)$. ……………………10 分

$\therefore \cos\theta=\left|\cos<\vec{n},\overrightarrow{CA}>\right|=\frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{CA}\right|}{\left|\vec{n}\right|\left|\overrightarrow{CA}\right|}=\frac{\lambda}{\sqrt{2}\sqrt{\lambda^2+1}}$（$\lambda>0$）. ……………………11 分

$\because \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1+\frac{1}{\lambda^2}}}<\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore \cos\theta\in(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$. ……………………12 分

解法二：

令 $CD=a$，连结 AC，交 BD 于点 O，过点 O 作 $OM\perp PB$，垂足为 M，连结 MC.

$\because ABCD$ 为正方形，

$\therefore CO\perp BD$.

$\because PD\perp$ 平面 $ABCD$，

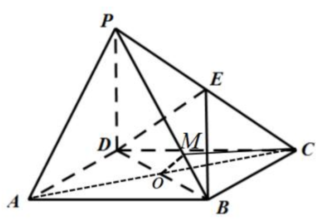
$\therefore PD\perp CO$.

$\because BD\cap PD=D$，

$\therefore CO\perp$ 平面 PBD. ……………………7 分

$\therefore CO\perp PB$.

又 $\because CO\cap OM=O$，



$\therefore PB\perp$平面COM．

$\therefore PB\perp CM$．

$\therefore \angle CMO$即为二面角$C-PB-D$的平面角．……………………9 分

$\because \Delta OMB \backsim \Delta PDB$，$\therefore \dfrac{OM}{PD}=\dfrac{OB}{PB}$．

$\therefore OM=\dfrac{OB\cdot PD}{PB}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}a\cdot\lambda a}{\sqrt{2a^2+\lambda^2a^2}}=\dfrac{\sqrt{2}\lambda}{2\sqrt{1+\lambda^2}}a$．……………………10 分

$\therefore \tan\angle CMO=\dfrac{CO}{OM}=\dfrac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda}=\sqrt{1+\dfrac{1}{\lambda^2}}>1(\lambda>0)$．……………………11 分

$\therefore \cos\theta\in(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2})$．……………………12 分

20.解：（1） 在$\triangle ABD$中，由余弦定理得：

$\cos\angle BAD=\dfrac{AD^2+AB^2-BD^2}{2AD\cdot AB}=\dfrac{2+4-10}{2\times\sqrt{2}\times2}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$．……………………2 分

$\because 0<\angle BAD<\pi$，$\therefore \angle BAD=\dfrac{3\pi}{4}$．……………………3 分

$\because$四边形$ABCD$内接于圆O，

$\therefore \angle BAD+\angle BCD=\pi$，$\therefore \angle BCD=\dfrac{\pi}{4}$．……………………4 分

$\because \angle BDC=\dfrac{\pi}{3}$，在$\triangle BCD$中，由正弦定理得：

$\dfrac{BD}{\sin\angle BCD}=\dfrac{CD}{\sin\angle CBD}$，即$\dfrac{\sqrt{10}}{\sin\frac{\pi}{4}}=\dfrac{CD}{\sin\frac{5\pi}{12}}$

$\therefore CD=\dfrac{\sqrt{10}\times\sin\frac{5\pi}{12}}{\sin\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\sqrt{10}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{\sqrt{30}+\sqrt{10}}{2}$．……………………5 分

$\therefore BD$边上的高$h=CD\times\sin\angle BDC=\dfrac{\sqrt{30}+\sqrt{10}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{10}+\sqrt{30}}{4}$．……………………6 分

（2）解法一：

由（1）可知：$S_{\triangle ABD}=\dfrac{1}{2}\cdot AD\cdot AB\cdot\sin\angle BAD=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=1$．……………………7 分

在$\triangle BCD$中，设$\angle BDC=\alpha,\angle CBD=\dfrac{3\pi}{4}-\alpha$，$\alpha\in(0,\dfrac{3\pi}{4})$

由正弦定理得：$\dfrac{CD}{\sin(\frac{3\pi}{4}-\alpha)}=\dfrac{\sqrt{10}}{\sin\frac{\pi}{4}}$，

$\therefore CD=\dfrac{\sqrt{10}\times\sin(\frac{3\pi}{4}-\alpha)}{\sin\frac{\pi}{4}}=2\sqrt{5}\sin(\dfrac{3\pi}{4}-\alpha)$．……………………9 分

$\therefore S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}\cdot BD\cdot CD\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}\times\sqrt{10}\times2\sqrt{5}\sin(\frac{3\pi}{4}-\alpha)\sin\alpha$

$=5\sqrt{2}\sin(\frac{3\pi}{4}-\alpha)\sin\alpha=5\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha)\sin\alpha$

$=5(\sin\alpha\cos\alpha+\sin^2\alpha)=5(\frac{1}{2}\sin2\alpha+\frac{1-\cos2\alpha}{2})$

$=5(\frac{1}{2}\sin2\alpha-\frac{1}{2}\cos2\alpha)+\frac{5}{2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}\sin(2\alpha-\frac{\pi}{4})+\frac{5}{2}$. ……………………11 分

$\therefore$当且仅当 $2\alpha-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，即 $\alpha=\frac{3\pi}{8}$ 时 $\triangle BCD$ 面积取到最大值 $\frac{5\sqrt{2}}{2}+\frac{5}{2}$

故四边形 $ABCD$ 面积的最大值为 $\frac{5\sqrt{2}}{2}+\frac{7}{2}$. ……………………12 分

解法二：

由（1）可知：$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}\cdot AD\cdot AB\cdot\sin\angle BAD=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=1$. ……………………7 分

在 $\triangle BCD$ 中，$BD=\sqrt{10},\angle BCD=\frac{\pi}{4}$，由余弦定理得：

$BD^2=CD^2+CB^2-2CD\cdot CB\cdot\cos\angle BCD$. ……………………9 分

即：$10=CD^2+CB^2-\sqrt{2}CD\cdot CB\geqslant(2-\sqrt{2})CD\cdot CB$

$\therefore CD\cdot CB\leqslant\frac{10}{2-\sqrt{2}}=5(2+\sqrt{2})$，当且仅当 $CD=CB$ 时取“=”. ……………………10 分

$(S_{\Delta BCD})_{\max}=\frac{1}{2}\times5(2+\sqrt{2})\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{5(\sqrt{2}+1)}{2}$. ……………………11 分

故四边形 $ABCD$ 面积的最大值为 $\frac{5\sqrt{2}}{2}+\frac{7}{2}$. ……………………12 分

21.解：（1）由题可知，$h(x)=\frac{x}{a^x}(x\in\mathrm{R})$，所以 $h'(x)=\frac{1-x\ln a}{a^x}$. ……………………1 分

由 $h'(x)<0$，得 $x>\frac{1}{\ln a}$；由 $h'(x)>0$，得 $x<\frac{1}{\ln a}$. ……………………2 分

所以 $h(x)$ 在 $(0,\frac{1}{\ln a})$ 单调递增，在 $(\frac{1}{\ln a},+\infty)$ 单调递减. ……………………3 分

所以 $h(x)$ 的极大值为 $h(\frac{1}{\ln a})=\frac{\frac{1}{\ln a}}{a^{\frac{1}{\ln a}}}=\frac{1}{e\ln a}$，无极小值. ……………………5 分

(注：只给出极大值，没有说无极小值扣 1 分)

（2）因为 $g(\frac{1}{x})+xf(x)=1$，所以 $a^{\frac{1}{x}}+x\log_a x=1$，

可得 $\frac{1}{x}a^{\frac{1}{x}}=\log_a(\frac{1}{x}a^{\frac{1}{x}})$. ……………………6 分

令$t=\frac{1}{x}a^{\frac{1}{x}}(a>1)$，可得$t'=\frac{a^{\frac{1}{x}}(-\frac{1}{x}\ln a-1)}{x^2}<0$，

所以$t=\frac{1}{x}a^{\frac{1}{x}}$在$(0,+\infty)$单调递减. ……………………7 分

故$g(\frac{1}{x})+xf(x)=1$有两个零点，等价于$h(t)=t-\log_a t$有两个零点. ……………………8 分

可得　$h'(t)=1-\frac{1}{t\ln a}$，

当$t\in(0,\frac{1}{\ln a})$时，　$h'(t)<0$；

当$t\in(\frac{1}{\ln a},+\infty)$时，　$h'(t)>0$，

所以$h(t)$在$(0,\frac{1}{\ln a})$递减，$(\frac{1}{\ln a},+\infty)$递增，

可得$h(t)_{\min}=h(\frac{1}{\ln a})=\frac{1}{\ln a}-\log_a\frac{1}{\ln a}=\log_a(a^{\frac{1}{\ln a}}\cdot\ln a)$. ……………………9 分

令$\log_a(a^{\frac{1}{\ln a}}\cdot\ln a)<0$，所以$a^{\frac{1}{\ln a}}\cdot\ln a<1$，　则$a^{\frac{1}{\ln a}}<\frac{1}{\ln a}$，

设$x_0=\frac{1}{\ln a}$，　则$a=\mathrm{e}^{\frac{1}{x_0}}$，　$a^{\frac{1}{\ln a}}=a^{x_0}=(\mathrm{e}^{\frac{1}{x_0}})^{x_0}=\mathrm{e}$. ……………………10 分

所以$a^{\frac{1}{\ln a}}<\frac{1}{\ln a}$，　则　$\mathrm{e}<\frac{1}{\ln a}$，　则$a\in(1,\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}})$. ……………………11 分

因为$h(\frac{1}{a})=\frac{1}{a}+1>0$，　$h\left(a^a\right)=a^a-a=a\left(a^{a-1}-1\right)>0$，

此时存在两零点　x_1,x_2，其中$x_1\in(\frac{1}{a},\frac{1}{\ln a}),x_2\in(\frac{1}{\ln a},+\infty)$，且$h\left(x_1\right)=h\left(x_2\right)=0$，

故$a\in(1,\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}})$. ……………………12 分

(注：没有用零点存在定理判断扣 1 分)

22.解：（1）因为圆C_1的参数方程为$\begin{cases}x=2+2\cos\alpha\\ y=1+2\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$为参数），

则其直角坐标方程为C_1:$(x-2)^2+(y-1)^2=4$，即$x^2+y^2-4x-2y+1=0$. ……………………2 分

因为$x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$， ……………………3 分

故C_1的极坐标方程为$\rho^2-4\rho\cos\theta-2\rho\sin\theta+1=0$. ……………………5 分

（2）因为C_2的极坐标方程为$\theta=\frac{\pi}{4}$，代入C_1的极坐标方程中，

得$\rho^2-3\sqrt{2}\rho+1=0$，

则$\rho_1+\rho_2=3\sqrt{2},\ \rho_1\cdot\rho_2=1$. ……………………7 分

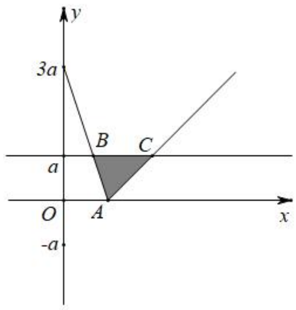
故$|PQ|=\sqrt{(\rho_1+\rho_2)^2-4\rho_1\rho_2}=\sqrt{14}$. ……………………8 分

则$\triangle C_1PQ$的高为$\sqrt{4-\frac{14}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. ……………………9 分

则$\triangle C_1PQ$的面积为$\frac{1}{2}|PQ|\cdot h=\frac{1}{2}\times\sqrt{14}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{7}}{2}$. ……………………10 分

23.解：（1）由题得$f(x)=2|x-a|-x+a=\begin{cases}x-a,x>a\\-3x+3a,x\leqslant a\end{cases}$. ……………………2 分

画出$y=f(x)$及$y=a$得图象，如下图所示，



易知$A(a,0),B(\frac{2a}{3},a)$，$C(2a,a)$，

$\therefore|BC|=\frac{4a}{3}$. ……………………4 分

$\therefore S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|BC|\cdot a=\frac{1}{2}\cdot\frac{4a}{3}\cdot a=\frac{2a^2}{3}=\frac{8}{3}$，解得$a=2$. ……………………5 分

（2）由（1）知$f(x)=\begin{cases}x-a,x>a\\-3x+3a,x\leqslant a\end{cases}$，

当$x>a$时，$f(x)>x$即为$x-a>x$，得$a<0$，

与条件矛盾，此时不等式的解为$\varnothing$； ……………………7 分

当$x\leqslant a$时，$f(x)>x$即为$-3x+3a>x$，得$x<\frac{3a}{4}$，

此时不等式的解为$x<\frac{3a}{4}$. ……………………9 分

综上所述，原不等式的解集为$(-\infty,\frac{3a}{4})$. ……………………10 分

(注：第（2）问也可由图象直接得出答案)