乐山市高中 2024 届第一次调查研究考试
文科数学参考答案及评分意见

2023. 12

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.

ABBDC　　BCCDC　　AB

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $\forall x\in \boldsymbol{Z}$，$x^2\neq 2x$；　　14. $y=\mathrm{e}x$；

15. $\dfrac{\pi}{6}$；　　16. -1.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分.

17.解：（1）甲得分的中位数为 $\dfrac{80+81}{2}=80.5$；……………………2 分

乙得分的众数为 78；……………………4 分

（2）若使用方案一：

$\bar{x}_{甲}=\dfrac{75+75+78+78+80+81+81+83+84+99}{10}=81.4$ ……………………5 分

$\bar{x}_{乙}=\dfrac{75+78+78+78+80+80+83+83+85+85}{10}=80.5$ ……………………6 分

因为 $\bar{x}_{甲}>\bar{x}_{乙}$，所以甲的得分较高. ……………………7 分

若使用方案二：

$\bar{y}_{甲}=\dfrac{75+78+78+80+81+81+83+84}{8}=80$ ……………………8 分

$\bar{y}_{乙}=\dfrac{78+78+78+80+80+83+83+85}{8}\approx 80.6$ ……………………9 分

因为 $\bar{y}_{甲}<\bar{y}_{乙}$，所以乙的得分较高. ……………………10 分

方案二更好，因为有一个评委给甲选手评分为99，高出其他评委的评分很多，方案二可以规避个别极端值对平均值的影响，评选结果更公平、更正. ……………………12 分

18.解：（1）$\because a_1=1$，

$\therefore b_1=1$，$b_2=\dfrac{a_2}{2}=\dfrac{a_1}{2}=\dfrac{1}{2}$，$b_3=\dfrac{a_3}{3}=\dfrac{3a_2}{3\times 4}=\dfrac{1}{4}$. ……………………3 分

（2）$\because 2na_{n+1}=(n+1)a_n$，$\therefore \dfrac{a_{n+1}}{n+1}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{a_n}{n}$，即 $b_{n+1}=\dfrac{1}{2}b_n$. ……………………6 分

又 $\because b_1=1$，$\therefore \{b_n\}$ 是以 1 为首项，以 $\dfrac{1}{2}$ 为公比的等比数列. ……………………8 分

（3）由（2）得 $b_n=1\times(\dfrac{1}{2})^{n-1}=\dfrac{1}{2^{n-1}}$ ……………………10 分

所以 $a_n=nb_n=\dfrac{n}{2^{n-1}}$ ……………………12 分

19.解：（1）E 是 PC 的中点. ……………………1 分

证明：

连结 AC，交 BD 于点 O，连结 OE.

$\because$ 底面 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore O$ 是 AC 的中点. ……………………2 分

$\because PA//$ 平面 EBD，平面 $PAC\cap$ 平面 $BDE=OE$，

$\therefore PA // OE$. ……………………4 分

$\because O$ 是 AC 的中点，

$\therefore E$ 是 PC 的中点. ……………………6 分

（2）$\because E$ 为 PC 中点，

$\therefore V_{E-BPD}=\frac{1}{2}V_{C-BPD}=\frac{1}{2}V_{P-DBC}$. ……………………8 分

若 $V_{E-BPD}=\frac{2}{3}$，则 $V_{P-DBC}=\frac{4}{3}$

$\because V_{P-DBC}=\frac{1}{3}\cdot S_{\Delta BDC}\cdot PD=\frac{2}{3}\cdot 2\lambda=\frac{4}{3}$. ……………………10 分

$\therefore \lambda=1$.

$\therefore$存在 $\lambda=1$，使三棱锥 $E-BPD$ 体积为 $\frac{2}{3}$. ……………………12 分

20.解：（1） 在$\triangle ABD$中，由余弦定理得：

$\cos\angle BAD=\frac{AD^2+AB^2-BD^2}{2AD\cdot AB}=\frac{2+4-10}{2\times\sqrt{2}\times 2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. ……………………2 分

$\because 0<\angle BAD<\pi$，$\therefore \angle BAD=\frac{3\pi}{4}$. ……………………3 分

$\because \angle BAD=3\angle BCD$，$\therefore \angle BCD=\frac{\pi}{4}$. ……………………4 分

$\because \angle BDC=\frac{5\pi}{12}$，在$\triangle BCD$中，由正弦定理得：

$\frac{BD}{\sin\angle BCD}=\frac{CD}{\sin\angle CBD}$，即 $\frac{\sqrt{10}}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{CD}{\sin\frac{\pi}{3}}$.

$\therefore CD=\frac{\sqrt{10}\times\sin\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{10}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{15}$. ……………………6 分

（2）**解法一：**

在$\triangle BCD$中，设 $\angle BDC=\alpha,\angle CBD=\frac{3\pi}{4}-\alpha$，$\alpha\in(0,\frac{3\pi}{4})$

由正弦定理得：$\frac{CD}{\sin(\frac{3\pi}{4}-\alpha)}=\frac{\sqrt{10}}{\sin\frac{\pi}{4}}$，

$\therefore CD=\frac{\sqrt{10}\times\sin(\frac{3\pi}{4}-\alpha)}{\sin\frac{\pi}{4}}=2\sqrt{5}\sin(\frac{3\pi}{4}-\alpha)$. ……………………8 分

$\therefore S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}\cdot BD\cdot CD\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}\times\sqrt{10}\times 2\sqrt{5}\sin(\frac{3\pi}{4}-\alpha)\sin\alpha$

$=5\sqrt{2}\sin(\frac{3\pi}{4}-\alpha)\sin\alpha=5\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha)\sin\alpha$

$=5(\sin\alpha\cos\alpha+\sin^2\alpha)=5(\frac{1}{2}\sin 2\alpha+\frac{1-\cos 2\alpha}{2})$

$=5(\frac{1}{2}\sin 2\alpha-\frac{1}{2}\cos 2\alpha)+\frac{5}{2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}\sin(2\alpha-\frac{\pi}{4})+\frac{5}{2}$. ……………………11 分

$\therefore$当且仅当$2\alpha-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，即$\alpha=\frac{3\pi}{8}$时$\triangle BCD$面积取到最大值$\frac{5\sqrt{2}}{2}+\frac{5}{2}$

故$\triangle BCD$面积的最大值为$\frac{5\sqrt{2}}{2}+\frac{5}{2}$. ……………………12 分

解法二：

在$\triangle BCD$中，$BD=\sqrt{10},\angle BCD=\frac{\pi}{4}$，由余弦定理得：

$BD^2=CD^2+CB^2-2CD\cdot CB\cdot\cos\angle BCD$. ……………………8 分

即：$10=CD^2+CB^2-\sqrt{2}CD\cdot CB\geqslant(2-\sqrt{2})CD\cdot CB$

$\therefore CD\cdot CB\leqslant\frac{10}{2-\sqrt{2}}=5(2+\sqrt{2})$，当且仅当$CD=CB$时取“=”. ……………………10 分

$(S_{\Delta BCD})_{\max}=\frac{1}{2}\times 5(2+\sqrt{2})\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{5(\sqrt{2}+1)}{2}$.

故$\triangle BCD$面积的最大值为$\frac{5\sqrt{2}}{2}+\frac{5}{2}$. ……………………12 分

21.解：（1）由题可知，$h(x)=\frac{x}{e^x}(x\in R)$，所以$h'(x)=\frac{1-x}{e^x}$. ……………………1 分

由$h'(x)<0$，得$x>1$；由$h'(x)>0$，得$x<1$. ……………………2 分

所以$h(x)$在$(0,1)$单调递增，在$(1,+\infty)$单调递减. ……………………3 分

所以$h(x)$的极大值为$h(1)=\frac{1}{e}$，无极小值. ……………………5 分

(注：只给出极大值，没有说无极小值扣 1 分)

（2）因为$g(x)-\frac{f(x)}{x}=1$，所以$a^x-\frac{\log_a x}{x}=1$，

可得$xa^x=x+\log_a x=\log_a(xa^x)$. ……………………6 分

令$t=xa^x(a>1)$，可得$t'=a^x+xa^x\ln a=a^x(1+x\ln a)>0$，

所以$t=xa^x$在$(0,+\infty)$单调递增. ……………………7 分

故$g(x)-\frac{1}{x}f(x)=1$有两个零点，等价于$h(t)=t-\log_a t$有两个零点. ……………………8 分

可得$h'(t)=1-\frac{1}{t\ln a}$，

当$t\in(0,\frac{1}{\ln a})$时，$h'(t)<0$；

当$t\in(\frac{1}{\ln a},+\infty)$时，$h'(t)>0$，

所以 $h(t)$ 在 $(0,\dfrac{1}{\ln a})$ 递减，$(\dfrac{1}{\ln a},+\infty)$ 递增，

可得 $h(t)_{\min}=h(\dfrac{1}{\ln a})=\dfrac{1}{\ln a}-\log_a\dfrac{1}{\ln a}=\log_a(a^{\frac{1}{\ln a}}\cdot\ln a)$． ……………………9 分

令 $\log_a(a^{\frac{1}{\ln a}}\cdot\ln a)<0$，所以 $a^{\frac{1}{\ln a}}\cdot\ln a<1$， 则 $a^{\frac{1}{\ln a}}<\dfrac{1}{\ln a}$，

设 $x_0=\dfrac{1}{\ln a}$， 则 $a=\mathrm{e}^{\frac{1}{x_0}}$， $a^{\frac{1}{\ln a}}=a^{x_0}=(\mathrm{e}^{\frac{1}{x_0}})^{x_0}=\mathrm{e}$． ……………………10 分

所以 $a^{\frac{1}{\ln a}}<\dfrac{1}{\ln a}$， 则 $\mathrm{e}<\dfrac{1}{\ln a}$， 则 $a\in(1,\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}})$． ……………………11 分

因为 $h(\dfrac{1}{a})=\dfrac{1}{a}+1>0$， $h\left(a^a\right)=a^a-a=a\left(a^{a-1}-1\right)>0$，

此时存在两零点 x_1,x_2，其中 $x_1\in(\dfrac{1}{a},\dfrac{1}{\ln a}),x_2\in(\dfrac{1}{\ln a},+\infty)$，且 $h\left(x_1\right)=h\left(x_2\right)=0$，

故 $a\in(1,\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}})$． ……………………12 分

（注：没有用零点存在定理判断扣 1 分）

22.解：（1）因为圆 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=2+2\cos\alpha\\ y=1+2\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数），

则其直角坐标方程为 C_1:$(x-2)^2+(y-1)^2=4$，即 $x^2+y^2-4x-2y+1=0$． ……………………2 分

因为 $x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$， ……………………3 分

故 C_1 的极坐标方程为 $\rho^2-4\rho\cos\theta-2\rho\sin\theta+1=0$． ……………………5 分

（2）因为 C_2 的极坐标方程为 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$，代入 C_1 的极坐标方程中，

得 $\rho^2-3\sqrt{2}\rho+1=0$，

则 $\rho_1+\rho_2=3\sqrt{2},\ \rho_1\cdot\rho_2=1$． ……………………7 分

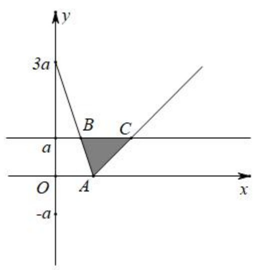
故 $|PQ|=\sqrt{(\rho_1+\rho_2)^2-4\rho_1\rho_2}=\sqrt{14}$． ……………………8 分

则 $\triangle C_1PQ$ 的高为 $\sqrt{4-\dfrac{14}{4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$． ……………………9 分

则 $\triangle C_1PQ$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}|PQ|\cdot h=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{14}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$． ……………………10 分

23.解：（1）由题得 $f(x)=2|x-a|-x+a=\begin{cases}x-a,x>a\\ -3x+3a,x\leqslant a\end{cases}$． ……………………2 分

画出 $y=f(x)$ 及 $y=a$ 得图象，如下图所示，



易知 $A(a,0), B(\frac{2a}{3}, a)$，$C(2a, a)$，

$\therefore |BC| = \frac{4a}{3}$ ．……………………4 分

$\therefore S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|BC| \cdot a = \frac{1}{2} \cdot \frac{4a}{3} \cdot a = \frac{2a^2}{3} = \frac{8}{3}$，解得 $a = 2$．……………………5 分

（2）由（1）知 $f(x) = \begin{cases} x - a, x > a \\ -3x + 3a, x \leqslant a \end{cases}$，

当 $x > a$ 时，$f(x) > x$ 即为 $x - a > x$，得 $a < 0$，

与条件矛盾，此时不等式的解为 $\varnothing$；……………………7 分

当 $x \leqslant a$ 时，$f(x) > x$ 即为 $-3x + 3a > x$，得 $x < \frac{3a}{4}$，

此时不等式的解为 $x < \frac{3a}{4}$．……………………9 分

综上所述，原不等式的解集为 $(-\infty, \frac{3a}{4})$．……………………10 分

(注：第（2）问也可由图象直接得出答案)