

机密★启用前 [考试时间：2023年12月20日下午3:00—5:00]

## 乐山市高中 2024 届第一次调查研究考试

# 文科数学

(本试卷共 4 页, 满分 150 分。考试时间 120 分钟)

### 注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 设全集  $U = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ , 集合  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{0, 2\}$ , 则  $(\complement_U A) \cap B =$

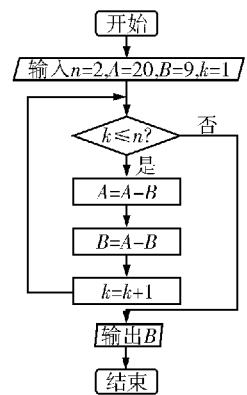
- A.  $\{0\}$                       B.  $\{2\}$                       C.  $\{0, 2\}$                       D.  $\{-1, 0, 2\}$

2. 已知复数  $z = \frac{1}{(1-i)^2}$ , 则复数  $zi+i$  的实部为

- A.  $\frac{1}{2}$                       B.  $-\frac{1}{2}$                       C. 1                      D. -1

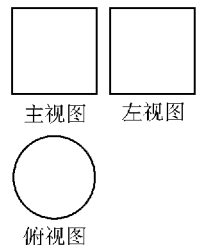
3. 执行右边的程序框图, 则输出的  $B =$

- A. -5  
B. 7  
C. 0  
D. 2



4. 如图是某几何体的三视图, 其中主视图和左视图是两个全等的正方形, 且边长为 2, 俯视图是直径为 2 的圆, 则这个几何体的侧面积为

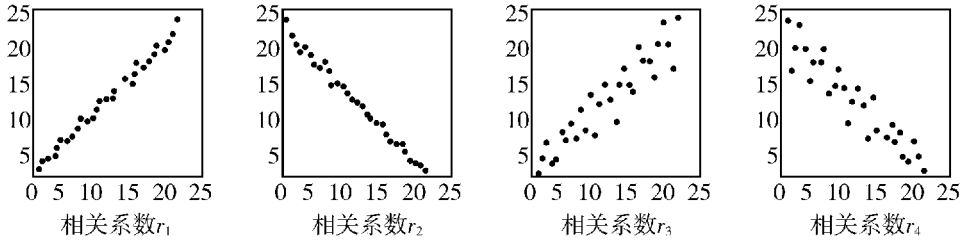
- A.  $\pi$                       B.  $2\pi$   
C.  $3\pi$                       D.  $4\pi$



5. 已知  $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = 2\cos\alpha$ , 则  $\tan\alpha + \tan 2\alpha =$

- A.  $\frac{2}{3}$                       B.  $\frac{11}{6}$                       C.  $-\frac{2}{3}$                       D.  $-\frac{11}{6}$

6. 对四组数据进行统计, 获得如下散点图, 关于其相关系数的比较, 说法正确的是



- A.  $r_4 < r_2 < 0 < r_1 < r_3$                       B.  $r_2 < r_4 < 0 < r_3 < r_1$   
 C.  $r_2 < r_4 < 0 < r_1 < r_3$                       D.  $r_4 < r_2 < 0 < r_3 < r_1$

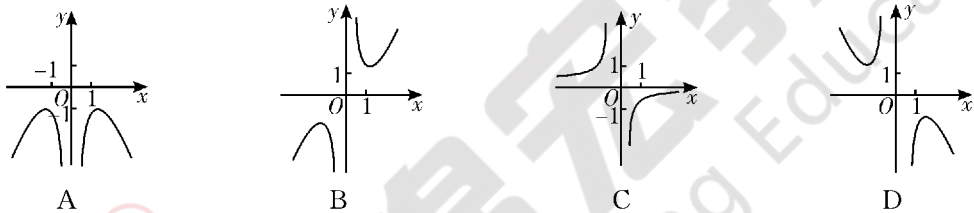
7. 3 个 0 和 2 个 1 随机排成一行, 则 2 个 1 不相邻的概率为

- A.  $\frac{1}{5}$                       B.  $\frac{2}{5}$                       C.  $\frac{3}{5}$                       D.  $\frac{4}{5}$

8. 设等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$ , 若  $S_3 = 9, S_6 = 36$ , 则  $a_7 + a_8 + a_9 =$

- A. 18                      B. 27                      C. 45                      D. 63

9. 函数  $f(x) = \frac{3^{-x} - 3^x}{x^2}$  的图象大致为



10. 地处长江上游的四川省乐山市, 多年来始终树立上游意识, 落实上游责任, 不断提升水环境治理体系和治理能力现代化水平, 为守护好这一江清水作出乐山贡献(摘自: 人民网四川频道)。为了解过滤净化原理, 某中学科创实践小组的学生自制多层式分级过滤器, 用于将含有沙石的大渡河河水进行净化。假设经过每一层过滤可以过滤掉五分之一的沙石杂质, 若要使净化后河水中沙石杂质含量不超过最初的三分之一, 则最少要经过多少层的过滤? (参考数据:  $\lg 2 \approx 0.30, \lg 3 \approx 0.48$ )

- A. 7                      B. 6                      C. 5                      D. 4

11. 已知函数  $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$  (其中  $\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ) 在  $x = \frac{\pi}{6}$  时取最大值, 两条对称轴之间的最小距离为  $\pi$ , 则直线  $l: y = -x + \frac{2\pi}{3}$  与曲线  $y = f(x)$  的交点个数为

- A. 1                      B. 2                      C. 3                      D. 4

12. 已知函数  $f(x)$  定义域为  $\mathbf{R}$ , 且满足  $f(0) = 0, f(-x) = f(x), f(1-t) - f(1+t) + 4t = 0$ , 给出以下四个命题:

- ①  $f(-1) = f(3)$                                       ②  $f(x+2) = f(x)$   
 ③  $f(4) = 64$                                         ④ 函数  $y = f(x) - 2x$  的图象关于直线  $x = 1$  对称

其中正确命题的个数是

- A. 0                      B. 1                      C. 2                      D. 3

二、填空题：本大题共 4 小题；每小题 5 分，共 20 分.

13. 命题“ $\exists x \in \mathbf{Z}, x^2 = 2x$ ”的否定是\_\_\_\_\_.

14. 曲线  $y = e^x$  在  $x=1$  处的切线方程为\_\_\_\_\_.

15. 若一个正三棱锥底面边长为 1, 高为  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ , 其内切球的表面积为\_\_\_\_\_.

16. 已知正六边形  $ABCDEF$  边长为 2,  $MN$  是正六边形  $ABCDEF$  的外接圆的一条动弦,  $MN=2$ ,  $P$  为正六边形  $ABCDEF$  边上的动点, 则  $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN}$  的最小值为\_\_\_\_\_.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或推演步骤.

17. (本小题满分 12 分)

为吸引更多优秀人才来乐山干事创业, 2023 年 10 月 27 日, 乐山市招才引智系列活动——教育人才专场在西南大学北碚校区招聘大厅举行, 其中, 甲、乙两名大学生参加了面试, 10 位评委打分如茎叶图所示:

甲					乙						
8	8	5	5	7	5	8	8	8			
4	3	1	1	0	8	0	0	3	3	5	5
				9	9						

(1) 写出甲得分的中位数和乙得分的众数;

(2) 现有两种方案评价选手的最终得分:

方案一: 直接用 10 位评委评分的平均值;

方案二: 将 10 位评委评分去掉一个最低分和一个最高分之后, 取剩下 8 个评分的平均值.

请分别用以上两种方案计算两位同学的最终得分, 并判断哪种评价方案更好? 为什么?

18. (本小题满分 12 分)

已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1, 2na_{n+1} = (n+1)a_n$ , 设  $b_n = \frac{a_n}{n}$ .

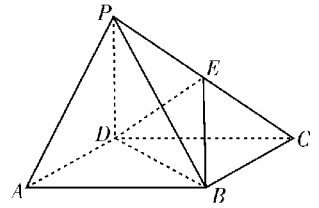
(1) 求  $b_1, b_2, b_3$ ;

(2) 判断数列  $\{b_n\}$  是否为等比数列, 并说明理由;

(3) 求  $\{a_n\}$  的通项公式.

19. (本小题满分 12 分)

如图,在四棱锥  $P-ABCD$  中,底面  $ABCD$  是边长为 2 的正方形, $PD \perp$  底面  $ABCD$ , $PD = \lambda CD$ ,点  $E$  在棱  $PC$  上, $PA \parallel$  平面  $EBD$ .



(1) 试确定点  $E$  的位置,并说明理由;

(2) 是否存在实数  $\lambda$ ,使三棱锥  $E-BPD$  体积为  $\frac{2}{3}$ .

20. (本小题满分 12 分)

在平面四边形  $ABCD$  中,已知  $\angle BAD = 3\angle BCD$ , $AB = 2$ , $AD = \sqrt{2}$ , $BD = \sqrt{10}$ .

(1) 若  $\angle BDC = \frac{5\pi}{12}$ ,求  $CD$ ;

(2) 求  $\triangle BCD$  面积的最大值.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = \log_a x$ , $g(x) = a^x$ ,其中实数  $a > 1$ .

(1) 当  $a = e$  时,求  $h(x) = \frac{x}{g(x)}$  在  $(0, +\infty)$  上的单调区间和极值;

(2) 若方程  $g(x) - \frac{f(x)}{x} = 1$  有两个零点,求实数  $a$  的取值范围.

请考生在第 22-23 题中任选一题作答,如果多做,则按所做的第一题计分.

22. (本小题满分 10 分)

在直角坐标系  $xOy$  中,已知圆  $C_1$  的参数方程为  $\begin{cases} x = 2 + 2\cos\alpha \\ y = 1 + 2\sin\alpha \end{cases}$  ( $\alpha$  为参数),以坐标原点为

极点, $x$  轴正半轴为极轴建立极坐标系.

(1) 求  $C_1$  的极坐标方程;

(2) 若直线  $C_2$  的极坐标方程为  $\theta = \frac{\pi}{4}$  ( $\rho \in \mathbf{R}$ ),设  $C_2$  与  $C_1$  的交点为  $P, Q$ ,求  $\triangle C_1 PQ$  的面积.

23. (本小题满分 10 分)

已知  $f(x) = 2|x-a| - x + a$ , $a > 0$ .

(1) 若曲线  $y = f(x)$  与直线  $y = a$  围成的图形面积为  $\frac{8}{3}$ ,求  $a$  的值;

(2) 求不等式  $f(x) > x$  的解集.