成都石室中学2023-2024年度上期高2024届一诊模拟
理科数学（A卷）参考答案

1.B 【解析】$A=\{y|y=2^x,x\ge 0\}=\{y|y\ge 1\}$，$B=\{x\in N||2x-3|\le 1\}=\{1,2\}$，故$A\cap B=\{1,2\}$.故选：B.

2. A 【解析】令$z=bi(b\ne 0)$，则$|z|=|bi|=|3+4i|=5$，故$b=\pm 5$，$zi=\pm 5$.故选：A.

3. D 【解析】由表中数据可得$\bar{x}=\frac{1}{5}(2+3+4+5+6)=4$，$\bar{y}=\frac{1}{5}(15.1+16.3+17+17.2+18.4)=16.8$，

因为回归直线过样本点的中心，所以$16.8=0.75\times 4+\hat{a}$，解得$\hat{a}=13.8$，

所以回归直线方程为$\hat{y}=0.75x+13.8$，

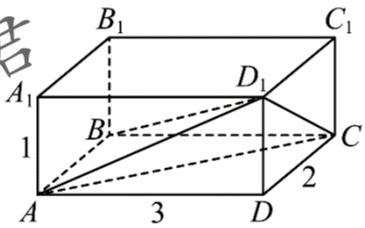
则该公司7月份这种型号产品的销售额为$y=0.75\times 7+13.8=19.05$万元.

故选：D.

4. B 【解析】由三视图可知多面体是如图所示的三棱锥$ABC-D_1$，由图可知

$AB=2,BC=3,AC=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$，$AD_1=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10},CD_1=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，

$BD_1=\sqrt{1^2+3^2+2^2}=\sqrt{14}$



所以最长的棱长为$\sqrt{14}$.

故选：B.

5. C 【解析】对于A选项，若$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$，则$\vec{c}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$，所以$\vec{c}\perp(\vec{a}-\vec{b})$，不能推出$\vec{a}=\vec{b}$，故A错误；

对于B选项，$x\ge 2,y\ge 2$成立时，必有$x^2+y^2\ge 4$成立，

反之，取$x=3,y=0$，则$x^2+y^2\ge 4$成立，但$x\ge 2,y\ge 2$不成立，

因此“$x^2+y^2\ge 4$”是“$x\ge 2,y\ge 2$”的必要不充分条件，B错误；

对于选项C，因为$f(x)=x^5+2x^4-3x^3+4x^2-x+1$，

所以可以把多项式写成如下形式：$f(x)=((((x+2)x-3)x+4)x-1)x+1$，

按照从内而外的顺序，依次计算一次多项式当$x=2$的值：

$v_0=2$，$v_1=2+2=4$，$v_2=4\times 2-3=5$，$v_3=5\times 2+4=14$，故C正确；

对于选项D，$P(X\ge 4)=P(X\le 2)=1-P(X>2)=0.38$，所以$P(3<X<4)=0.5-P(X\ge 4)=0.12$，故D错误.

故选：C.

6. D 【解析】因为$2\sin\alpha-\sin\beta=\sqrt{3}$，$2\cos\alpha-\cos\beta=1$，

所以平方得，$(2\sin\alpha-\sin\beta)^2=3$，$(2\cos\alpha-\cos\beta)^2=1$，

即$4\sin^2\alpha-4\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=3$，$4\cos^2\alpha-4\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=1$，

两式相加可得$4-4\sin\alpha\sin\beta-4\cos\alpha\cos\beta+1=4$，

即$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{4}$，

故$\cos(\alpha-\beta)=\frac{1}{4}$，

$\cos(2\alpha-2\beta)=2\cos^2(\alpha-\beta)-1=2\times\frac{1}{16}-1=-\frac{7}{8}$.

故选：D.

7. A 【解析】因为直线$y=a_1x+m$与圆$(x-2)^2+y^2=1$的两个交点关于直线$y=-\frac{x-d}{2}$对称，

所以直线$y=-\frac{x-d}{2}$经过圆心，且直线$y=a_1x+m$与直线$y=-\frac{x-d}{2}$垂直，

所以$2-d=0$，即$d=2$，且$a_1=2$，

则$S_n=2n+\frac{n(n-1)}{2}\times2=n(n+1)$，$\frac{1}{S_n}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，

以数列$\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$的前 100 项和为

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{100}-\frac{1}{101}=1-\frac{1}{101}=\frac{100}{101}$.

故选：A.

8. B 【解析】令$g(x)=ax^3+bx^2+c$，则$g'(x)=3ax^2+2bx$，

由$g'(x)=3ax^2+2bx=0$得$x_1=0,x_2=-\frac{2b}{3a}$，

结合图象知函数在$(-\infty,0)$上递增，在$(0,2)$递减，

所以$-\frac{2b}{3a}=2$且$a>0$，所以$b<0$，

又$f(x)=2^{ax^3+bx^2+c}(a,b,c\in\mathbf{R})$过点$(-2,1)$，

所以$-8a+4b+c=0$，即$c=20a$，

所以$b<a<c$

故选：B.

9．A 【解析】正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB//D_1C_1, AB=D_1C_1$,所以四边形 ABC_1D_1 为平行四边形，所以

$AD_1//BC_1$，

又 $AD_1\not\subset$ 平面 BDC_1, $BC_1\subset$ 平面 BDC_1,

所以 $AD_1//$ 平面 BDC_1，即当点 P 在线段 AD_1 上运动时 d_P 恒为定值，

又 $V_{D-BPC_1}=V_{P-BDC_1}=\frac{1}{3}S_{\triangle BDC_1}\times d_P$，$S_{\triangle BDC_1}$ 也为定值，

所以三棱锥 $D-BPC_1$ 的体积为定值，①正确；

在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB\perp$ 平面 BCC_1B_1，$CB_1\subset$ 平面 BCC_1B_1,所以 $CB_1\perp AB$，

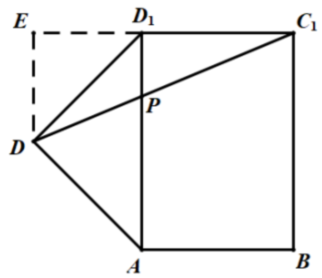
在正方形 BCC_1B_1 中：$CB_1\perp BC_1$,

又 $AB\cap BC_1=B$, $AB,BC\subset$ 平面 ABC_1D_1，所以 $CB_1\perp$ 平面 ABC_1D_1，

又 $C_1P\subset$ 平面 ABC_1D_1，所以 $C_1P\perp CB_1$，②正确；

因为点 P 在线段 AD_1 上运动, 若 $P\in$ 平面$ABCD$，则点 P 与点 A 重合，则三棱锥 C_1-PBD 的外接球即为三棱锥 C_1-ABD 的外接球，故半径为 $\sqrt{3}$，③正确；

如图所示：将三角形 ADD_1 沿 AD_1 翻折 $90°$ 得到该图形，连接 DC_1 与 AD_1 相交于点 P，此时 $|C_1P|+|DP|$ 取得最小值 DC_1，延长 C_1D_1，过 D 作 $DE\perp C_1E_1$ 于点 E，

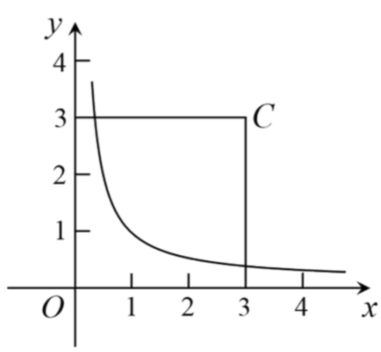


在 $Rt\Delta DEC_1$ 中，$DC_1=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(2+\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{8+4\sqrt{2}}$，

故 $|C_1P|+|DP|$ 的最小值为 $\sqrt{8+4\sqrt{2}}$，④错误.

故选：A.

10. B 【解析】该程序框图相当于在[0，3]上任取 10000 对数对 (x,y)，其中满足 $xy\le 1$ 的数对有 N 对.显然该问题是几何概型.



不等式组 $\begin{cases}0\le x\le 3\\0\le y\le 3\end{cases}$ 所表示的区域面积为 9，

$\begin{cases}0\le x\le 3\\0\le y\le 3\\xy\le 1\end{cases}$ 所表示的区域面积为 $1+\int_{\frac{1}{3}}^{3}\frac{1}{x}dx=1+2\ln 3$，

故$\frac{1+2\ln 3}{9}\approx\frac{N}{10^4}$，因此$N\approx\frac{10^4(1+2\ln 3)}{9}$.

故选：B.

11. D 【解析】令$f(x)=0$，得$(\ln x)^2-\frac{a}{2}x\ln x+\frac{a}{e}x^2=0$，整理得$(\frac{\ln x}{x})^2-\frac{a}{2}\frac{\ln x}{x}+\frac{a}{e}=0$.

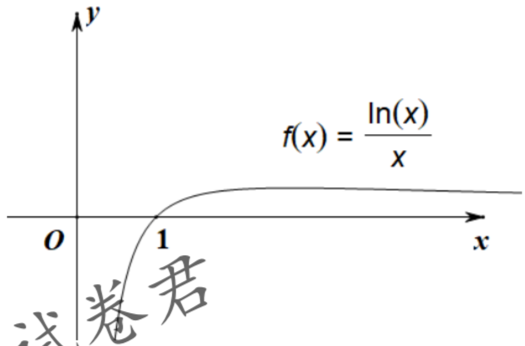
令$t=\frac{\ln x}{x}(x>0)$，$x>0$,原方程化为$t^2-\frac{a}{2}t+\frac{a}{e}=0$.

设$g(x)=\frac{\ln x}{x}(x>0)$，

则$g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，令$g'(x)=0$，解得$x=e$，且$g(e)=\frac{\ln e}{e}=\frac{1}{e}$，

当$x\in(0,e)$时，$g'(x)>0$，则$g(x)$单调递增，

当$x\in(e,+\infty)$时，$g'(x)<0$，则$g(x)$单调递减，



则$g(x)$在$x=e$时，有最大值为$g(e)=\frac{1}{e}$，

画出简图，如右图所示，

因为原方程为$t^2-\frac{a}{2}t+\frac{a}{e}=0$.

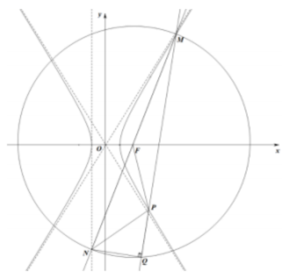
由题可知有三个零点，因此方程有两个不等实根t_1,t_2

结合$g(x)=\frac{\ln x}{x}(x>0)$图象可得：$t_1<0,0<t_2<\frac{1}{e}$，

设$h(t)=t^2-\frac{a}{2}t+\frac{a}{e}$，则$\begin{cases}h(0)<0\\h(\frac{1}{e})>0\end{cases}$，得到$-\frac{2}{e}<a<0$，

因为$t_1=\frac{\ln x_1}{x_1},t_2=\frac{\ln x_2}{x_2}=\frac{\ln x_3}{x_3}$，所以

$\frac{2\ln x_1}{x_1}+\frac{\ln x_2}{x_2}+\frac{\ln x_3}{x_3}=2t_1+2t_2=a\in\left(-\frac{2}{e},0\right)$.



故选：D.

12. A 【解析】由题可知，点Q在以MN为直径的圆上，故$\angle NQP=90^\circ$，连接

FP、NP，如图所示，可得$|PM|\cdot|PQ|=-|\overrightarrow{PM}|\cdot|\overrightarrow{PN}|\cdot\cos\angle MPN=-\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$，其中

$-\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=-\left(\overrightarrow{PF}+\overrightarrow{FM}\right)\cdot\left(\overrightarrow{PF}+\overrightarrow{FN}\right)=-\left(\overrightarrow{PF}+\overrightarrow{FM}\right)\cdot\left(\overrightarrow{PF}-\overrightarrow{FM}\right)=-\left(\overrightarrow{PF}^2-\overrightarrow{FM}^2\right)$

$=\overrightarrow{FM}^2-\overrightarrow{PF}^2=81-\overrightarrow{PF}^2$，

由图可知，当点 P 运动到双曲线右顶点时，即当 $\left|\overrightarrow{PF}\right|=1$ 时， $|PM|\cdot|PQ|$ 取最大值为 80.

故选：A.

13. $(0,1)$【解析】抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2$ 的标准方程为 $x^2=4y$，焦点在 y 轴正半轴上，焦点坐标为 $(0,1)$.

14. $\frac{2}{9}$【解析】由题意可知，4 人去 4 个不同的景点，总事件数为 $4^4=256$，事件 B 的总数为 $3^3=27$，

所以 $P(B)=\frac{27}{256}$，

事件 A 和事件 B 同时发生，即“只有甲去了锦水文风，另外 3 人去了另外 3 个不同的景点”，

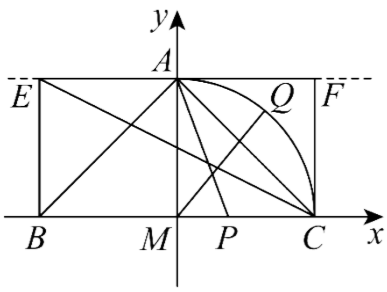
则事件 AB 的总数为 $A_3^3=6$，

所以 $P(AB)=\frac{6}{256}$，

所以 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$，

故答案为：$\frac{2}{9}$.

15. $\left[0,\sqrt{10}\right]$【解析】以 M 为圆心，以 MA,MC 为 x,y 轴，建立如图所示的平面直角坐标系，



由于 $AB=AC=2$, 所以 $BC=2\sqrt{2},BM=CM=\sqrt{2}$，

由于点 Q 在 $\overset{\frown}{AC}$，不妨设 $Q\left(\sqrt{2}\cos\theta,\sqrt{2}\sin\theta\right)$； $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,

$A\left(0,\sqrt{2}\right),P(a,0)$，其中 $-\sqrt{2}\le a\le\sqrt{2}$，

$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{MQ}=\left(a,-\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{2}\cos\theta,\sqrt{2}\sin\theta\right)=\left(a+\sqrt{2}\cos\theta,-\sqrt{2}+\sqrt{2}\sin\theta\right)$,

所以 $\left|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{MQ}\right|=\sqrt{\left(a+\sqrt{2}\cos\theta\right)^2+\left(-\sqrt{2}+\sqrt{2}\sin\theta\right)^2}$，

$\sqrt{\left(a+\sqrt{2}\cos\theta\right)^2+\left(-\sqrt{2}+\sqrt{2}\sin\theta\right)^2}$ 可看作是 $\overset{\frown}{AC}$ 上的点 $Q\left(\sqrt{2}\cos\theta,\sqrt{2}\sin\theta\right)$ 到点 $R\left(-a,\sqrt{2}\right)$ 的距离，

由于点 $R\left(-a,\sqrt{2}\right)$ 在线段 $y=\sqrt{2}\left(-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}\right)$ 上运动，

故当点 $R\left(-a,\sqrt{2}\right)$ 运动到点 $E\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ 时，此时距离最大，为 $CE=\sqrt{CF^2+EF^2}=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{10}$,

当点 $R\left(-a,\sqrt{2}\right)$ 运动到点 $A\left(0,\sqrt{2}\right)$ 时，此时距离最小为 0，

综上可知：$\left|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{MQ}\right|\in\left[0,\sqrt{10}\right]$.

16. 1【解析】因为 $f(-x)=\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-(-x)}-2\sin(-x)=\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{x}+2\sin x=-f(x)$，

所以 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数.

又 $f'(x)=e^{x}+e^{-x}-2\cos x\geq 2\sqrt{e^{x}\cdot e^{-x}}-2\cos x=2-2\cos x\geq 0$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增．

不等式 $f(a-x^{2}e^{x})+f(2\ln x+x)\leq 0$ 对任意的 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，

即 $f(2\ln x+x)\leq f(x^{2}e^{x}-a)$ 对任意的 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，

所以 $2\ln x+x\leq x^{2}e^{x}-a$ 对任意的 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，

即 $a\leq x^{2}e^{x}-(2\ln x+x)=e^{\ln x^{2}}\cdot e^{x}-(2\ln x+x)=e^{2\ln x+x}-(2\ln x+x)$ 对任意的 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立．

令 $h(x)=e^{x}-x$，所以 $h'(x)=e^{x}-1$，

所以当 $x>0$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数；

当 $x<0$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上为减函数．

所以 $h(x)_{\min}=h(0)=e^{0}-0=1$，

设 $g(x)=2\ln x+x$，显然 $g(x)$ 为 $(0,+\infty)$ 上的增函数，

因为 $g(\frac{1}{e})=2\ln\frac{1}{e}+\frac{1}{e}=-2+\frac{1}{e}<0$，$g(1)=1>0$，所以存在 $x_{0}\in(\frac{1}{e},1)$，使得 $g(x_{0})=2\ln x_{0}+x_{0}=0$，

所以 $[e^{2\ln x+x}-(2\ln x+x)]_{\min}=1$，此时 $2\ln x+x=0$，

所以 $a\leq 1$，即 a 的最大值为 1．

故答案为：1．

17．解：（1）$\because \vec{a}//\vec{b}$，$\therefore \sqrt{3}\cos x=-2\sin x$，则 $\tan x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$；--2 分

$$\cos 2x=\cos^{2}x-\sin^{2}x=\frac{\cos^{2}x-\sin^{2}x}{\sin^{2}x+\cos^{2}x}=\frac{1-\tan^{2}x}{\tan^{2}x+1}=\frac{1-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2}}{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2}+1}=\frac{1}{7}$$.---5 分

（2）$f(x)=(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{a}=(\sin x+\sqrt{3}\cos x)\sin x+(1-2)\times 1=\sin^{2}x+\sqrt{3}\sin x\cos x-1$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}$，---7 分

又 $f(A)=\frac{1}{2}$，所以 $\sin\left(2A-\frac{\pi}{6}\right)=1$，$A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，得 $2A-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即 $A=\frac{\pi}{3}$，-----------------------------------8 分

因为 $a=2$，且由余弦定理 $a^{2}=b^{2}+c^{2}-2bc\cos A$ 可知，$4=b^{2}+c^{2}-2bc\cos\frac{\pi}{3}$，

所以 $b^{2}+c^{2}=4+bc$，

由基本不等式可得 $b^2+c^2=4+bc\geq 2bc$，

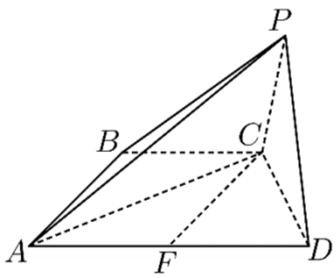
所以 $bc\leq 4$，（当且仅当 $b=c=2$ 时取等）--------------------11 分

故 $\left(S_{\Delta ABC}\right)_{\max}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times 4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，

即 ΔABC 面积最大值为 $\sqrt{3}$.--------------------12 分

（注：若求角的函数值域问题，按步骤对应给分）

18.（1）证明：取 AD 中点为 F，连接 AC，CF，由 $AD=2BC$ 得 $AF\parallel BC$ 且 $AF=BC$.



∴四边形 $ABCF$ 为平行四边形，

$\therefore CF=AF=DF$，

$\therefore AC\perp CD$，--------------------2 分

又因为二面角 $P-CD-B$ 为直二面角，且平面 $PCD\cap$ 平面 $ABCD=CD$，

$\therefore AC\perp$ 平面 PCD，因为 $PD\subset$ 平面 PCD，

所以 $AC\perp PD$.--------------------5 分

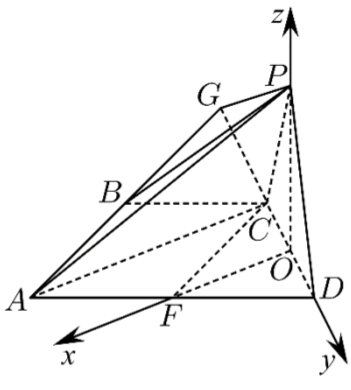
（2）解：如图，延长 AB 和 DC 交于点 G，连接 GP，则 GP 为平面 PCD 与平面 PAB 的交线 l，

取 CD 中点为 O，连接 OF，OP，

$\because OP\perp AC$，$OF\parallel AC$，

$\therefore OP\perp OF$，$OF\perp CD$，$OP\perp CD$.--------------------7 分

如图，以 O 为坐标原点，OF，OD，OP 分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系，



$P\left(0,0,\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$，$A\left(\sqrt{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2},0\right)$，$G\left(0,-\dfrac{3\sqrt{2}}{2},0\right)$，$D\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2},0\right)$，

$\vec{PD}=\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$，$\vec{AD}=\left(-\sqrt{2},\sqrt{2},0\right)$，$\vec{PG}=\left(0,-\dfrac{3\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$，

设平面 PAD 的法向量为 $\vec{m}=(a,b,c)$，

$$\begin{cases}\overrightarrow{PD}\cdot\vec{m}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}b-\dfrac{\sqrt{6}}{2}c=0\\ \overrightarrow{AD}\cdot\vec{m}=-\sqrt{2}a+\sqrt{2}b=0\end{cases},$$

令 $c=1$，解得 $\vec{m}=\left(\sqrt{3},\sqrt{3},1\right)$--------------------9 分

设 l 与平面 PAD 的所成角为 θ，则 $\sin\theta=\dfrac{\left|\vec{m}\cdot\overrightarrow{PG}\right|}{\left|\vec{m}\right|\cdot\left|\overrightarrow{PG}\right|}=\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{6}}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$，------11 分

因为 $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，

即 l 与平面 PAD 所成角的正弦值为 $\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$． ------12 分

19．解：（1）若甲第二次答题选方案一，记两次答题累计得分为 ξ，则 ξ 的可能取值为 70，60，20，10．

$P(\xi=70)=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{9}{25},P(\xi=60)=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{6}{25}\ P(\xi=20)=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{6}{25},P(\xi=10)=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{4}{25}$ ------1 分

则累计得分的期望 $E(\xi)=70\times\dfrac{9}{25}+60\times\dfrac{6}{25}+20\times\dfrac{6}{25}+10\times\dfrac{4}{25}=46$． ------2 分

若甲第二次答题选方案二，记两次答题累计得分为 η，则 η 的可能取值为 60，30，20.

$P(\eta=60)=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{9}{25},P(\eta=30)=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{5}+\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{12}{25},P(\eta=20)=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{4}{25}$， ------3 分

则累计得分的期望 $E(\eta)=60\times\dfrac{9}{25}+30\times\dfrac{12}{25}+20\times\dfrac{4}{25}=39.2$． ------4 分

因为 $E(\xi)>E(\eta)$，所以应选择方案一． ------5 分

（2）①依题意得 $E\left(X_{i+1}\right)=\dfrac{6}{5}E\left(X_i\right)+4$． ------6 分

X_1 的可能取值为 20，10，其分布列为

X_1	20	10
P	$\dfrac{3}{5}$	$\dfrac{2}{5}$

所以 $E\left(X_1\right)=20\times\dfrac{3}{5}+10\times\dfrac{2}{5}=16$．

由 $E\left(X_{i+1}\right)=\dfrac{6}{5}E\left(X_i\right)+4$，得 $E\left(X_{i+1}\right)+20=\dfrac{6}{5}\left[E\left(X_i\right)+20\right]$，

所以 $\left\{E\left(X_n\right)+20\right\}$ 为等比数列，其中首项为 36，公比为 $\dfrac{6}{5}$，

所以 $E\left(X_n\right)+20=36\times\left(\dfrac{6}{5}\right)^{n-1}$， ------7 分

故 $E\left(X_n\right)=36\times\left(\dfrac{6}{5}\right)^{n-1}-20$． ------8 分

②由①知，$E\left(X_n\right)=36\times\left(\frac{6}{5}\right)^{n-1}-20$，

故累计得分为$\dfrac{36\left[1-\left(\frac{6}{5}\right)^n\right]}{1-\frac{6}{5}}-20n=180\times\left(\frac{6}{5}\right)^n-20n-180$，--9 分

设$f(x)=180\times\left(\frac{6}{5}\right)^x-20x-180(x>0)$，$f'(x)=180\times\left(\frac{6}{5}\right)^x\times\ln\frac{6}{5}-20(x>0)$

当$x>0$时，$f'(x)=180\times\left(\frac{6}{5}\right)^x\times\ln\frac{6}{5}-20>0$

所以当$x>0$时，$f(x)$单调递增，--10 分

由题可知，至少需答题次数n满足：$\begin{cases}180\times\left(\frac{6}{5}\right)^n-20n-180>2166\\ n\in\mathrm{N}^*\text{且}n\geq 2\end{cases}$，

结合单调性与零点存在性定理，得到$\begin{cases}180\times\left(\frac{6}{5}\right)^{14}-20\times14-180\approx1851.2<2166\\ 180\times\left(\frac{6}{5}\right)^{15}-20\times15-180\approx2312>2166\\ n\in\mathrm{N}^*\text{且}n\geq 2\end{cases}$，故$n\geq15$，

所以至少需答题 15 次.--12 分

20．解：（1）函数$f\left(x\right)=x^2-x\cos x+\sin x-1$，因为$f\left(0\right)=-1$，所以切点为$\left(0,-1\right)$，-----------------1 分

由$f'\left(x\right)=2x-\cos x-x\sin x+\cos x=x\left(2-\sin x\right)$，$x\in\mathbf{R}$，得$f'\left(0\right)=0$，

所以曲线在点$\left(0,f\left(0\right)\right)$处的切线斜率为 0，---2 分

所以曲线$y=f\left(x\right)$在点$\left(0,f\left(0\right)\right)$处的切线方程为$y=-1$．--3 分

（2）由（1）可知$f'\left(x\right)=2x-\cos x-x\sin x+\cos x=x\left(2-\sin x\right)$，$x\in\mathbf{R}$，

因为$\sin x\in\left[-1,1\right]$，所以$2-\sin x>0$，令$f'\left(x\right)=0$，则$x=0$．--4 分

当$x\in\left(-\infty,0\right)$时，$f'\left(x\right)<0$，$f(x)$单调递减；

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

又因为 $f(0)=-1<0$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{4}>0, f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{4}-2>0$，--6 分

所以，由零点存在定理可知，存在唯一的 $x_1\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 使得 $f(x_1)=0$，存在唯一的 $x_2\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 使得 $f(x_2)=0$．故函数 $f(x)$ 有且仅有两个零点．--7 分

（3）因为 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，当 $x=0$ 时，由 $f(0)=-1\geq 1-2a$ 得 $a\geq 1$--9 分

下面证明：当 $a\geq 1$ 时，对于任意 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，$f(x)\geq 1-2a$ 恒成立,

即证 $ax^2-x\cos x+\sin x-1\geq 1-2a$，即证 $\left(x^2+2\right)a-x\cos x+\sin x-2\geq 0$；

而当 $a\geq 1$ 时，$\left(x^2+2\right)a-x\cos x+\sin x-2\geq x^2+2-x\cos x+\sin x-2=x^2-x\cos x+\sin x$，-----------10 分

由（2）知，$x^2-x\cos x+\sin x\geq 0$；所以 $a\geq 1$ 时，$\left(x^2+2\right)a-x\cos x+\sin x-2\geq 0$ 恒成立；

综上所述，$a\in[1,+\infty)$．---12 分

21．解：（1）因为 P 为 $\triangle ABC$ 的重心，且边 AC,AB 上的两条中线长度之和为 6，

所以 $|PB|+|PC|=\frac{2}{3}\times 3\sqrt{6}=2\sqrt{6}>|BC|$,---1 分

故由椭圆的定义可知 P 的轨迹 Γ 是以 $B(-2,0),C(2,0)$ 为焦点的椭圆（不包括长轴的端点），

且 $a=\sqrt{6},c=2$，所以 $b=\sqrt{2}$，--2 分

所以 P 的轨迹 Γ 的方程为 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1\left(x\neq\pm\sqrt{6}\right)$.--4 分，

注：未挖点扣 1 分

（2）①依题意，设直线 DE 方程为 $x=my+2(m\neq 0)$.

联立 $\begin{cases}x=my+2\\ \frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1\end{cases}$，得 $\left(m^2+3\right)y^2+4my-2=0$，

易知 $\Delta=16m^2+8\left(m^2+3\right)=24\left(m^2+1\right)>0$

设 $D(x_1,y_1)$，$E(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=-\frac{4m}{m^2+3}$，$y_1\cdot y_2=-\frac{2}{m^2+3}$.---5 分

因为 $DM \perp x$ 轴，$EN \perp x$ 轴，

所以 $M(x_1,0)$，$N(x_2,0)$.

所以直线 DN：$y=\dfrac{y_1}{x_1-x_2}(x-x_2)$，

直线 EM：$y=\dfrac{y_2}{x_2-x_1}(x-x_1)$，

联立解得 $x_Q=\dfrac{x_1y_2+x_2y_1}{y_1+y_2}=\dfrac{(my_1+2)y_2+(my_2+2)y_1}{y_1+y_2}=2+\dfrac{2my_1y_2}{y_1+y_2}=3$.--------------------------------7 分

从而点 Q 在定直线 $x=3$ 上. --8 分

②因为 $S_{\Delta DEQ}=\dfrac{1}{2}|EN|\cdot|x_Q-x_1|=\dfrac{1}{2}|y_2|\cdot|3-x_1|=\dfrac{1}{2}|y_2-my_1y_2|$，--9 分

又 $\dfrac{my_1y_2}{y_1+y_2}=\dfrac{1}{2}$，则 $S_{\Delta DEQ}=\dfrac{1}{2}\left|y_1-\dfrac{y_1+y_2}{2}\right|=\dfrac{1}{4}|y_1-y_2|=\dfrac{1}{4}\sqrt{(y_1-y_2)^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\dfrac{\sqrt{m^2+1}}{m^2+3}$，

--10 分

设 $\sqrt{m^2+1}=t>1$，则 $S_{\Delta DEQ}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\cdot\dfrac{t}{t^2+2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\cdot\dfrac{1}{t+\frac{2}{t}}\le\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，

当且仅当 $t=\dfrac{2}{t}$，即 $m=\pm1$ 时，等号成立.

故 ΔDEQ 面积的最大值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.--12 分

22．解：（1）令 $x=0$，则 $t^2-2t-3=0$，解得 $t=3$，或 $t=-1$（舍），

则 $y=3^2-3-2=4$，即 $B(0,4)$，--2 分

令 $y=0$，则 $t^2-t-2=0$，解得 $t=2$，或 $t=-1$（舍），

则 $x=2^2-2\times2-3=-3$，即 $A(-3,0)$，--4 分

$\therefore|AB|=\sqrt{(0+3)^2+(4-0)^2}=5$.--5 分

（2）曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2=\dfrac{16}{1+3\cos^2\theta}$，即 $(\rho\sin\theta)^2+4(\rho\cos\theta)^2=16$，

由 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 得 C_2 的普通方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}=1$，---6 分

设C_2上点的坐标为$\left(2\cos\theta,4\sin\theta\right)$，--7 分

由（1）知直线 AB 的方程为$4x-3y+12=0$，

令C_2上的点 P 到直线 AB 的距离为d，

则$d=\dfrac{\left|8\cos\theta-12\sin\theta+12\right|}{5}=\dfrac{\left|4\sqrt{13}\cos\left(\theta+\varphi\right)+12\right|}{5}$，--9 分

所以C_2上的点 P 到直线 AB 的距离为$\left[0,\dfrac{4\sqrt{13}+12}{5}\right]$.--10 分

23．解：（1）当$a=\dfrac{1}{2}$时，不等式$f\left(x\right)\le 8$可化为$\left|x+2\right|+\left|x-3\right|\le 8$，

$\therefore\begin{cases}x\le -2\\1-2x\le 8\end{cases}$，或$\begin{cases}-2<x<3\\5\le 8\end{cases}$，或$\begin{cases}x\ge 3\\2x-1\le 8\end{cases}$，--2 分

解得$-\dfrac{7}{2}\le x\le -2$或 $-2<x<3$ 或$3\le x\le\dfrac{9}{2}$，--4 分

求并集得：$-\dfrac{7}{2}\le x\le\dfrac{9}{2}$，

所以原不等式的解集为$\left[-\dfrac{7}{2},\dfrac{9}{2}\right]$.--5 分

（2）因为$f\left(x\right)=\left|x+4a\right|+\left|x-\dfrac{9}{4a+1}\right|\ge\left|x+4a-x+\dfrac{9}{4a+1}\right|=\left|4a+\dfrac{9}{4a+1}\right|$，

当且仅当$\left(x+4a\right)\cdot\left(x-\dfrac{9}{4a+1}\right)\le 0$时，即$-4a\le x\le\dfrac{9}{4a+1}$时取到最小值，------------------6 分

又因为$a>0$，所以$f\left(x\right)_{\min}=4a+\dfrac{9}{4a+1}$，所以$m=4a+\dfrac{9}{4a+1}$，------------------7 分

所以$\left(m+1\right)^2+16a^2+8a+1=\left(4a+\dfrac{9}{4a+1}+1\right)^2+16a^2+8a+1=2\left(4a+1\right)^2+\left(\dfrac{9}{4a+1}\right)^2+18$，

因为$2\left(4a+1\right)^2+\left(\dfrac{9}{4a+1}\right)^2+18\ge 2\sqrt{2\left(4a+1\right)^2\bullet\left(\dfrac{9}{4a+1}\right)^2}+18=18\sqrt{2}+18$，------------------9 分

当且仅当$2\left(4a+1\right)^2=\left(\dfrac{9}{4a+1}\right)^2$时，即$a=\dfrac{3}{4\sqrt[4]{2}}-\dfrac{1}{4}$时，

$\left(m+1\right)^2+16a^2+8a+1$的最小值为$18\sqrt{2}+18$--10