成都石室中学2023-2024年度上期高2024届一诊模拟
数学试题（理）

（总分：150分，时间：120分钟）

第Ⅰ卷（共60分）

一、选择题（本题共12道小题，每小题5分，共60分）

1．已知集合 $A=\left\{y\,|\,y=2^x\right\},B=\left\{x\in\mathrm{N}\,\|2x-3|\le 1\right\}$，则 $A\cap B=$（　）

A．$\{0,1,2\}$　　B．$\{1,2\}$　　C．$\{1,2,3\}$　　D．$[1,2]$

2．已知纯虚数 z 满足 $|z|=|3+4\mathrm{i}|$，则 $z\mathrm{i}=$（　）

A．± 5　　B．$3-4\mathrm{i}$　　C．$-4+3\mathrm{i}$　　D．$\pm 5\mathrm{i}$

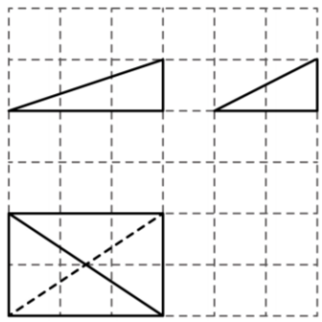
3．某公司一种型号的产品近期销售情况如表：

月份 x	2	3	4	5	6
销售额 y（万元）	15.1	16.3	17.0	17.2	18.4

根据上表可得到回归直线方程 $\hat{y}=0.75x+\hat{a}$，据此估计，该公司7月份这种型号产品的销售额约为（　）

A．18.85万元　　B．19.3万元　　C．19.25万元　　D．19.05万元

4．如图，网格纸上绘制的是一个多面体的三视图，网格小正方形的边长为1，则该多面体最长的棱长为（　）



A．$\sqrt{10}$　　B．$\sqrt{14}$　　C．$\sqrt{13}$　　D．$\sqrt{15}$

5．下列说法正确的是（　）

A．已知非零向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，若 $\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$，则 $\vec{a}=\vec{b}$

B．设 x，$y\in\mathrm{R}$，则“$x^2+y^2\ge 4$”是“$x\ge 2$ 且 $y\ge 2$”的充分不必要条件

C．用秦九韶算法求这个多项式 $f(x)=x^5+2x^4-3x^3+4x^2-x+1$ 的值，当 $x=2$ 时，v_3 的值为14

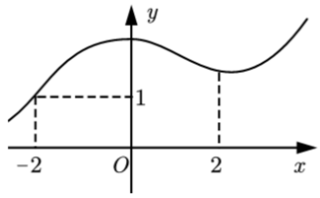
D．若随机变量 $X\sim N\left(3,\sigma^2\right)$，$P(X>2)=0.62$，则 $P(3<X<4)=0.24$

6．已知 $2\sin\alpha-\sin\beta=\sqrt{3}$，$2\cos\alpha-\cos\beta=1$，则 $\cos(2\alpha-2\beta)=$（　）

A．$-\dfrac{1}{8}$　　B．$\dfrac{\sqrt{15}}{4}$　　C．$\dfrac{1}{4}$　　D．$-\dfrac{7}{8}$

7．公差为 d 的等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1，其前 n 项和为 S_n，若直线 $y=a_1x+m$ 与圆 $(x-2)^2+y=1$ 的两个交点关于直线 $y=-\dfrac{x-d}{2}$ 对称，则数列 $\left\{\dfrac{1}{S_n}\right\}$ 的前100项和等于（　）

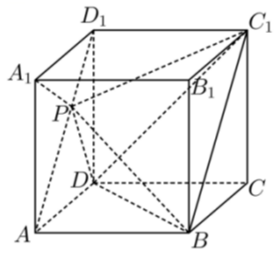
A．$\frac{100}{101}$　　　B．$\frac{99}{100}$　　　C．$\frac{98}{99}$　　　D．1



8．函数 $f\left(x\right)=2^{ax^3+bx^2+c}\left(a,b,c\in\mathbf{R}\right)$ 的大致图象如图所示，则 a，b，c 大小顺序为（　　）

A．$b<c<a$　　　B．$b<a<c$　　　C．$a<b<c$　　　D．$a<c<b$

9．如图，棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P 在线段 AD_1 上运动，以下四个命题：

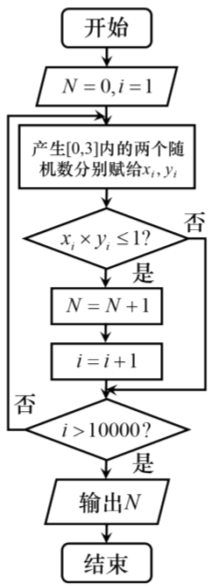


①三棱锥 $D-BPC_1$ 的体积为定值；②$C_1P\perp CB_1$；③若 $P\in$ 平面$ABCD$，则三棱锥 C_1-PBD 的外接球半径为 $\sqrt{3}$；④$\left|C_1P\right|+\left|DP\right|$ 的最小值为 $\sqrt{2}+\sqrt{5}$．其中真命题有（　　）

A．①②③　　　B．①②④　　　C．①②③④　　　D．③④

10．执行如图所示的程序框图，则输出 N 的值与下面的哪个数最接近？（　　）

A．$\frac{10^4}{9}$　　B．$\frac{10^4\times(1+2\ln 3)}{9}$　　C．$\frac{10^4\times(8-2\ln 3)}{9}$　　D．$\frac{1+2\ln 3}{9}$



11．已知函数 $f\left(x\right)=(\ln x)^2-\frac{a}{2}x\ln x+\frac{a}{e}x^2$ 有三个零点 x_1,x_2,x_3，且 $x_1<x_2<x_3$，则 $\frac{2\ln x_1}{x_1}+\frac{\ln x_2}{x_2}+\frac{\ln x_3}{x_3}$ 的取值范围是（　　）

A．$\left(-\frac{1}{e^2-e},0\right)$　　B．$\left(-\frac{1}{e^2},0\right)$　　C．$\left(-\frac{1}{2e},0\right)$　　D．$\left(-\frac{2}{e},0\right)$

12．已知双曲线 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 的右焦点为 F，$M(5,6\sqrt{2})$，直线 MF 与抛物线 $y^2=4x$ 的准线交于点 N，点 P 为双曲线上一动点，且点 P 在以 MN 为直径的圆内，直线 MP 与以 MN 为直径的圆交于点 M,Q，则 $\left|PM\right|\cdot\left|PQ\right|$ 的最大值为（　　）

A．80　　　B．81　　　C．72　　　D．71

第Ⅱ卷（共 90 分）

二、填空题（本题共 4 道小题，每小题 5 分，共 20 分）

13．抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2$ 的焦点坐标为_______________．

14．石室校园，望楼汉阙，红墙掩映，步移景异！现有甲、乙、丙、丁四位校友到“文翁化蜀”、“锦水文风”、“魁星阁”、“银杏大道”4 处景点追忆石室读书时光.若每人只去一处景点，设事件 A 为“4 个人去的景点各不相同”，事件 B 为“只有甲去了锦水文风”，则 $P\left(A|B\right)=$________.

15. 在等腰直角三角形 ABC 中，$AB=2$，M 为斜边 BC 的中点，以 M 为圆心，MA 为半径作 $\overset{\frown}{AC}$，点 P 在线段 BC 上，点 Q 在 $\overset{\frown}{AC}$ 上，则 $\left|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{MQ}\right|$ 的取值范围是 ________.

16. 已知函数 $f(x)=e^{x}-e^{-x}-2\sin x$，不等式 $f(a-x^{2}e^{x})+f(2\ln x+x)\le 0$ 对任意的 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，则 a 的最大值为______.

三、解答题（本题共 6 道小题，共 70 分）

17.（本小题满分 12 分）已知向量 $\vec{a}=(\sin x,1)$，$\vec{b}=(\sqrt{3}\cos x,-2)$，函数 $f(x)=(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{a}$.

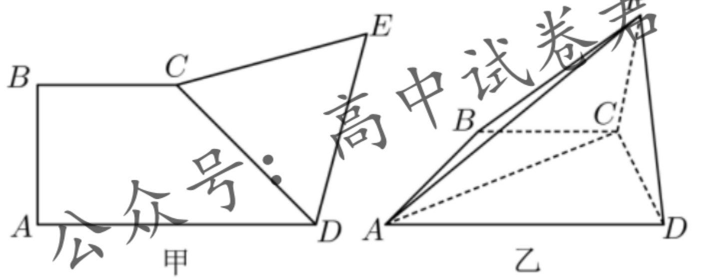
(1)若 $\vec{a}//\vec{b}$，求 $\cos 2x$ 的值；

(2)a，b，c 为 ΔABC 的内角 A，B，C 的对边，$a=2$，且 $f(A)=\dfrac{1}{2}$，求 ΔABC 面积的最大值.

18.（本小题满分 12 分）下图甲是由梯形 $ABCD$ 和正三角形 CDE 组成的一个平面图形，其中 $BC//AD$，$AB\perp AD$，$AD=2BC=2AB=2$，将 ΔCDE 沿 CD 折起使点 E 到达点 P 的位置（如图乙），使二面角 $P-CD-B$ 为直二面角.

(1)证明：$AC\perp PD$；

(2)若平面 PCD 与平面 PAB 的交线为 l，求 l 与平面 PAD 所成角的正弦值.



19.（本小题满分 12 分）石室中学社团为庆祝石室中学 2166 年校庆，为同学们准备了丰富多彩的游戏节目.其中某个知识答题游戏节目，共需要完成 $n(n\in\mathbf{N}_{+},且\,n\geqslant 2)$ 次答题，并以累计的总分作为参考依据．若甲同学参加该游戏，且每次回答正确的概率为 $\dfrac{3}{5}$，回答错误的概率为 $\dfrac{2}{5}$，各次答题相互独立．规定第一次答题时，回答正确得 20 分，回答错误得 10 分，第二次答题时，设置了两种答题方案供选择，方案一：回答正确得 50 分，回答错误得 0 分．方案二：若回答正确，则获得上一次答题分数的两倍，回答错误得 10 分．从第三次答题开始执行第二次答题所选方案，直到答题结束.

(1)如果 $n=2$，甲选择何种方案参加比赛答题更加有利？并说明理由；

(2)若甲选择方案二，则①记甲第 i 次获得的分数为 X_i，期望为 $E(X_i)$，求 $E(X_n)$；

②若甲累计总分的期望值超过 2166 分，即可获得校园文创产品一份，求至少需要答题的次数.

（参考数据：$1.2^{13}\approx 10.7$；$1.2^{14}\approx 12.84$；$1.2^{15}\approx 15.4$；$1.2^{16}\approx 18.5$）

20．（本小题满分 12 分）已知函数 $f(x)=ax^2-x\cos x+\sin x-1$．

(1)若 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

(2)若 $a=1$ 时，求函数 $f(x)$ 的零点个数；

(3)若对于任意 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，$f(x)\geq 1-2a$ 恒成立，求 a 的取值范围．

21．（本小题满分 12 分）已知 $B(-2,0),C(2,0)$ 为 ΔABC 的两个顶点，P 为 ΔABC 的重心，边 AC,AB 上的两条中线长度之和为 $3\sqrt{6}$．

(1)求点 P 的轨迹 Γ 的方程；

(2)过 C 作不平行于坐标轴的直线交 Γ 于 D，E 两点，若 $DM\perp x$ 轴于点 M，$EN\perp x$ 轴于点 N，直线 DN 与 EM 交于点 Q.

①求证：点 Q 在一条定直线上，并求此定直线；

②求 ΔDEQ 面积的最大值.

选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答.如果多做，则按所做的第一题计分.

[选修 4-4：坐标系与参数方程]（10 分）

22．（本小题满分 10 分）在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=t^2-2t-3\\y=t^2-t-2\end{cases}$（$t$ 为参数且 $t\neq-1$），C_1 分别与 x 轴、y 轴交于 A、B 两点．以坐标原点 O 为极点，x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2=\dfrac{16}{1+3\cos^2\theta}$．

(1)C_1 与坐标轴交于 A，B 两点，求 $|AB|$；

(2)求 C_2 上的点 P 到直线 AB 距离的范围．

[选修 4-5：不等式选讲]（10 分）

23．（本小题满分 10 分）已知函数 $f(x)=|x+4a|+\left|x-\dfrac{9}{4a+1}\right|(a>0)$.

(1)当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，求不等式 $f(x)\leq 8$ 的解集；

(2)若 $f\left(x\right)$ 的最小值为 m，求 $\left(m+1\right)^{2}+16a^{2}+8a+1$ 的最小值.