参考答案(理科)

一、单选题：共 12 道小题，每题 5 分,共 60 分.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C	A	D	B	C	C	A	D	A	D	B	D

二、填空题：共 4 道小题，每题 5 分,共 20 分.

13. -1　　14. -70　　15. $\frac{3\pi}{4}$　　16. $3\sqrt{2}$

三、解答题：共 5 道大题，共 70 分.

17. (12 分)解：

（1）设数列$\{a_n\}$的公比为q，数列$\{b_n\}$的公差为d，

由$a_1=2b_1=2$，有$a_1=2$，$b_1=1$，

又由$a_2=2b_2$，有$2q=2(d+1)$，有$q=d+1$，

又由$a_3=2b_3+2$，有$2q^2=2(1+2d)+2$，有$q^2=2d+2$，

可得$q^2=2q$，得$q=2$或$q=0$（舍去），$d=1$，

故$a_n=2^n$，$b_n=n$；

（2）证明：由（1）知：$c_n=\frac{b_n^2}{a_n}=\frac{n^2}{2^n}$，$n\in N^*$，

则$c_{n+1}-c_n=\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}-\frac{n^2}{2^n}=\frac{2n+1-n^2}{2^{n+1}}$

当$n\geqslant 3$时，$c_{n+1}-c_n<0$，即$c_3>c_4>c_5>c_6>c_7>\cdots>0$，

而$c_1=\frac{1}{2},c_2=1,c_3=\frac{9}{8},c_4=1$，当$n\geqslant 4$时，有$\frac{T_{n+1}}{T_n}=c_{n+1}<1$，

则$T_1=\frac{1}{2},T_2=\frac{1}{2},T_3=\frac{9}{16},T_4=\frac{9}{16}>T_5>T_6>\cdots$,故$T_n\leq\frac{9}{16}$.

18.（12 分）解：

（1）ξ的所有可能取值为 0，1，2，3，

$P(\xi=0)=\frac{1}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{4}{25}$，$P(\xi=1)=\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}+\frac{1}{4}\times C_2^1\cdot\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{14}{25}$，

$P(\xi=2)=\frac{3}{4}\times C_2^1\cdot\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{4}$，$P(\xi=3)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{3}{100}$，

∴ξ的分布列如下：

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{4}{25}$	$\frac{14}{25}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{100}$

$E(\xi)=\frac{14}{25}+\frac{1}{2}+\frac{9}{100}=\frac{115}{100}=\frac{23}{20}$.

（2）记事件A为“该学生复评晋级”，事件B为“该学生初评是C”，

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.15\times\frac{1}{5}}{0.6\times\frac{1}{4}+0.15\times\frac{1}{5}+0.05\times\frac{1}{6}}=\frac{18}{113}.$$

19.（12 分）解：

（1）由 $BC//AD,\angle ADC=90^\circ,AB=BC=2DE$，所以平面四边形 $ABCD$ 为直角梯形，设 $AB=BC=2DE=4a$，因为 $\angle ABC=120^\circ$．

所以在 $Rt\triangle CDE$ 中，$CD=2\sqrt{3}a,EC=4a,\tan\angle ECD=\dfrac{DE}{CD}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，则 $\angle ECD=30^\circ$，又 $\angle ADC=\angle BCD=90^\circ$，所以 $\angle BCE=60^\circ$，由 $EC=BC=AB=4a$，

所以 ΔBCE 为等边三角形，

又 F 是 EC 的中点，所以 $BF\perp EC$，又 $BF\perp PC,EC,PC\subset$ 平面 $PEC,EC\cap PC=C$，

则有 $BF\perp$ 平面 PEC，

而 $BF\subset$ 平面 $ABCE$，故平面 $PEC\perp$ 平面 $ABCE$．

（2）在 $Rt\Delta PEC$ 中，$PE=DE=PF=\dfrac{1}{2}EC=2a$，取 EF 中点 O，所以 $PO\perp EF$，

由（1）可知平面 $PEC\perp$ 平面 $ABCE$，平面 $PEC\cap$ 平面 $ABCE=EC$，

所以 $PO\perp$ 平面 $ABCE$，

以 O 为坐标原点，$\overrightarrow{OC}$ 方向为 y 轴方向，

建立如图所示的空间直角坐标系，

则 $P(0,0,\sqrt{3}a),A(2\sqrt{3}a,-3a,0),B(2\sqrt{3}a,a,0),C(0,3a,0)$，

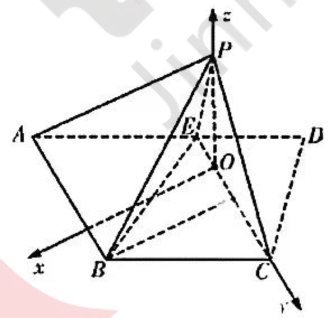
$\overrightarrow{PA}=(2\sqrt{3}a,-3a,-\sqrt{3}a),\overrightarrow{PB}=(2\sqrt{3}a,a,-\sqrt{3}a),\overrightarrow{PC}=(0,3a,-\sqrt{3}a)$，

设平面 PAB 的法向量 $\vec{m}=(x,y,z)$，由 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{PA}=0,\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{PB}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}2\sqrt{3}ax-3ay-\sqrt{3}az=0,\\ 2\sqrt{3}ax+ay-\sqrt{3}az=0,\end{cases}$ 取 $x=1$，则 $\vec{m}=(1,0,2)$

设直线 PC 与平面 PAB 所成角大小为 θ，

则 $\sin\theta=\dfrac{|\vec{m}\cdot\overrightarrow{PC}|}{|\vec{m}||\overrightarrow{PC}|}=\dfrac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{1^2+2^2}\cdot\sqrt{(3a)^2+(-\sqrt{3}a)^2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

故直线 PC 与平面 PAB 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$．



20.(12 分)解：

（1）由题得：$\dfrac{\sqrt{\left(x-\sqrt{3}\right)^2+y^2}}{\left|x-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，两边平分并化简得 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，即曲线 C 的方程．

（2） 设点 $G(x_1,y_1)$，$H(x_2,y_2)$．

直线 $GH:y=k(x-t)(k>0)$ 与椭圆 C 的方程 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 联立，

消去 y 得 $\left(1+4k^2\right)x^2-8k^2tx+\left(4k^2t^2-4\right)=0$．

由韦达定理：$x_1+x_2=\dfrac{8k^2t}{1+4k^2}$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{4k^2t^2-4}{1+4k^2}$．

由条件，直线 AG 的方程为 $y=\dfrac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，直线 AH 的方程为 $y=\dfrac{y_2}{x_2+2}(x+2)$，

于是可得 $y_M=\dfrac{y_1(t+2)}{x_1+2}$，$y_N=\dfrac{y_2(t+2)}{x_2+2}$．

因为 A，O，M，N 四点共圆，由相交弦定理可知 $y_M(-y_N)=(-t)(t+2)$，

化简得 $\dfrac{y_1y_2}{(x_1+2)(x_2+2)}=\dfrac{t}{t+2}$

又 $y_1=k(x_1-t)$，$y_2=k(x_2-t)$，代入整理得：$\dfrac{k^2\left(x_1x_2-t(x_1+x_2)+t^2\right)}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}=\dfrac{t}{t+2}$．

将韦达定理代入化简得：$\dfrac{t^2-4}{4(t+2)^2}=\dfrac{t}{t+2}$，即 $t=-\dfrac{2}{3}$．

21.(12 分)解：

(1) 由 $\lambda=1$ 知，$F(x)=\cos a-\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$，$F'(x)=-\dfrac{\cos x(x-a)-(\sin x-\sin a)}{(x-a)^2}$，令

$G(x)=-\cos x(x-a)+(\sin x-\sin a)$，由 $G'(x)=\sin x(x-a)>0$，知 $G(x)$ 在 $(a,\dfrac{\pi}{2})$ 上单增，

有 $G(x)>G(a)=0$，即 $F'(x)>0$，亦知 $F(x)$ 在 $(a,\dfrac{\pi}{2})$ 上单调递增.

(2) 设 $f(x)=[(1-\lambda)\cos x+\lambda\cos a](x-a)-(\sin x-\sin a)$，且 $x\in(a,\dfrac{\pi}{2})$，

$f'(x)=\lambda(\cos a-\cos x)-(1-\lambda)(x-a)\sin x$，$f''(x)=(2\lambda-1)\sin x+(\lambda-1)(x-a)\cos x$，

1) 当 $\lambda\le\dfrac{1}{2}$ 时，由 $f''(x)\le(2\cdot\dfrac{1}{2}-1)\sin x+(\dfrac{1}{2}-1)(x-a)\cos x=-\dfrac{1}{2}(x-a)\cos x<0$，知 $f'(x)$ 在 $(a,\dfrac{\pi}{2})$ 上单减，有 $f'(x)<f'(a)=0$，亦知 $f(x)$ 在 $(a,\dfrac{\pi}{2})$ 上单减，有 $f(x)<f(a)=0$，即 $F(x)=\dfrac{f(x)}{x-a}<0$，满足题设；

2) 当 $\dfrac{1}{2}<\lambda<1$ 时，对 $x\in(a,\dfrac{\pi}{2})$，

$f''(x)=(2\lambda-1)\sin x+(\lambda-1)(x-a)\cos x>(2\lambda-1)\sin a+(\lambda-1)(x-a)$，

取 $b=\min\{\dfrac{\pi}{2},a+\dfrac{2\lambda-1}{1-\lambda}\sin a\}$，当 $x\in(a,b)$ 时，$f''(x)>0$，知 $f'(x)$ 在 (a,b) 上单增，有 $f'(x)>f'(a)=0$，亦知 $f(x)$ 在 (a,b) 上单增，有 $f(x)>f(a)=0$，即 $F(x)=\dfrac{f(x)}{x-a}>0$，不满足题设；

3) 当 $\lambda\ge1$ 时，对 $x\in(a,\dfrac{\pi}{2})$，$f'(x)=\lambda(\cos a-\cos x)-(1-\lambda)(x-a)\sin x\ge\cos a-\cos x>0$，

知 $f(x)$ 在 $(a,\dfrac{\pi}{2})$ 上单增，有 $f(x)>f(a)=0$，即 $F(x)=\dfrac{f(x)}{x-a}>0$，不满足题设；

综上，仅当 $\lambda\le\dfrac{1}{2}$ 时，满足题设.

22.(10 分)解:

【详解】(1) 由曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2=\dfrac{2}{1+\cos^2\theta}$，可得 $\rho^2+\rho^2\cos^2\theta=2$，又由 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$，

代入可得 $2x^2+y^2=2$，即曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+\dfrac{y^2}{2}=1$.

(2) 把直线参数方程 $\begin{cases}x=t\cos\alpha\\ y-1+t\sin\alpha\end{cases}$ (t 为参数)，代入曲线 C 的直角坐标方程 $x^2+\dfrac{y^2}{2}=1$，

整理得 $(1+\cos^2\alpha)t^2+2\sin\alpha\cdot t-1=0$，设 A,B 对应的参数分别为 t_1,t_2，得 $t_1+t_2=-\dfrac{2\sin\alpha}{1+\cos^2\alpha}, t_1\cdot t_2=-\dfrac{1}{1+\cos^2\alpha}$，

因为点 $P(0,1)$ 恰为线段 AB 的三等分点，不妨设 $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PB}$，则 $|t_1|=2|t_2|$，

所以 $t_1=-2t_2$，代入 $t_1+t_2=-\dfrac{2\sin\alpha}{1+\cos^2\alpha}, t_1\cdot t_2=-\dfrac{1}{1+\cos^2\alpha}$，化简得 $\sin^2\alpha=\dfrac{2}{9}$，又因为 $\alpha\in(0,\pi)$，所以 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

23.(10 分)解:

(Ⅰ) 当 $m=0$ 时，不等式 $|2x|+|x-2|<5$ 可转化为:

$\begin{cases}x<0\\ -2x+2-x<5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 2\\ 2x-x+2<5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x>2\\ 2x+x-2<5\end{cases}$ ………………………… 2 分

整理得:

$\begin{cases}x<0\\ x>-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 2\\ x<3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x>2\\ x<\dfrac{7}{3}\end{cases}$

所以不等式的解集为: $\{x\mid -1<x<\dfrac{7}{3}\}$ ………………………… 5 分

(Ⅱ) 因为 $|2x-2|-|2x+m|\leqslant|2x-2-2x-m|=|m+2|$

若 $|2x-2|-f(x)<m^2$ 恒成立.

只需求解 $|m+2|<m^2$ 即可 ………………………… 8 分

从而 $\begin{cases}m+2<m^2\\ m+2>-m^2\end{cases}$ 解得　$m<-1$ 或 $m>2$ ………………………… 10 分