

成都七中2023-2024学年度2024届高三（上）一诊模拟试卷  
数学(文)

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分，共 150 分，考试时间 120 分钟。

第 I 卷

一、选择题(本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的)

1. 已知集合  $A = \{x \in \mathbb{Z} | x^2 - 2x - 3 < 0\}$ ，则集合  $A$  的子集个数为 ( )

- A. 3                      B. 4                      C. 8                      D. 16

2. 已知  $a$  为实数，若复数  $(a + i)(1 - 2i)$  为纯虚数，则  $a =$  ( )

- A. -2                      B.  $-\frac{1}{2}$                       C.  $\frac{1}{2}$                       D. 2

3. 一组数据共含大小不一的 7 个数值，其平均数和方差分别为  $\bar{x}_1$  和  $s_1^2$ ，若去掉一个最大值和一个最小值，则剩下的数据其平均数和方差分别为  $\bar{x}_2$  和  $s_2^2$ ，则一定有 ( )

- A.  $\bar{x}_1 < \bar{x}_2$                       B.  $\bar{x}_1 > \bar{x}_2$                       C.  $s_1^2 < s_2^2$                       D.  $s_1^2 > s_2^2$

4. 与  $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$  有相同定义域的函数是 ( )

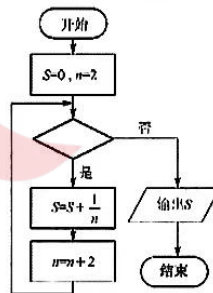
- A.  $y = x^{\frac{2}{3}}$                       B.  $y = (\sqrt{x})^2$                       C.  $y = \lg(10^x)$                       D.  $y = e^{\ln x}$

5. 若向量  $\vec{a}, \vec{b}$  满足：  $|\vec{a}| = 1, (\vec{a} + \vec{b}) \perp \vec{a}, |2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{10}$ ，则  $|\vec{b}| =$  ( )

- A. 2                      B.  $\sqrt{2}$                       C. 10                      D.  $\sqrt{10}$

6. 阅读如图所示的程序框图，运行相应的程序。若输出的  $S$  为  $\frac{11}{12}$ ，则判断框中填写的内容可以是 ( )

- A.  $n \leq 4?$                       B.  $n \leq 5?$                       C.  $n \leq 6?$                       D.  $n \leq 8?$



7. 已知  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ，则“ $a \leq b$ ”的必要不充分条件可以是 ( )

- A.  $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$                       B.  $ac \leq bc$                       C.  $ac^2 \leq bc^2$                       D.  $a^2 \leq b^2$

8. 抛物线  $C: y^2 = 2px (p > 0)$  的顶点为  $O$ ，斜率为 1 的直线  $l$  过点  $(2p, 0)$ ，且与抛物线  $C$  交于  $A, B$  两点，若  $\triangle OAB$  的面积为  $8\sqrt{5}$ ，则该抛物线的准线方程为 ( )
- A.  $x = -1$       B.  $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$       C.  $x = -2$       D.  $x = -\sqrt{2}$
9. 设  $m, n$  是两条不相同的直线， $\alpha, \beta$  是两个不重合的平面，则下列命题错误的是 ( )
- A. 若  $m \perp \alpha, n // \beta, \alpha // \beta$ ，则  $m \perp n$
- B. 若  $n // \alpha, n \perp \beta$ ，则  $\alpha \perp \beta$
- C. 若  $m, n$  是异面直线， $m \subset \alpha, m // \beta, n \subset \beta, n // \alpha$ ，则  $\alpha // \beta$
- D. 若  $m \perp n, m \perp \beta$ ，则  $n // \beta$
10. 已知  $\alpha - \beta = \frac{\pi}{3}$ ， $\tan \alpha - \tan \beta = 3\sqrt{3}$ ，则  $\cos(\alpha + \beta)$  的值为 ( )
- A.  $\frac{1}{2}$       B.  $\frac{1}{3}$       C.  $-\frac{1}{4}$       D.  $-\frac{1}{6}$
11. 与曲线在某点处的切线垂直，且过该点的直线称为曲线在某点处的法线，若曲线  $y = x^4$  的法线的纵截距存在，则其最小值为 ( )
- A.  $\frac{3}{4}$       B. 1      C.  $\frac{17}{16}$       D.  $\frac{5}{4}$
12. 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左焦点为  $F$ ，过  $F$  的直线与圆  $x^2 + y^2 = a^2$  相切于点  $Q$ ，与双曲线的右支交于点  $P$ ，若  $|PQ| = 2|QF|$ ，则双曲线  $C$  的离心率为 ( )
- A.  $\frac{\sqrt{13}}{3}$       B.  $\frac{\sqrt{13}}{2}$       C.  $\frac{3}{2}$       D.  $\frac{4}{3}$

第 II 卷

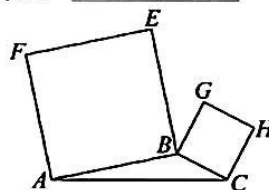
二、填空题(本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分)

13. 函数  $f(x) = (2x+1)(x-a)$  是偶函数，则  $a =$  \_\_\_\_\_.

14. 若  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x-3y+2 \leq 0, \\ x-y \leq 0, \\ y \geq 0, \end{cases}$  则  $z = x-2y$  的最大值为\_\_\_\_\_.

15. 半球的表面积与其内最大正方体的表面积之比为\_\_\_\_\_.

16. 如图，在  $\triangle ABC$  所在平面内，分别以  $AB, BC$  为边向外作正方形  $ABEF$  和正方形  $BCHG$ . 记  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ，面积为  $S$ . 已知  $S = \frac{3}{4}$ ，且  $a \sin A + c \sin C = 4a \sin C \sin B$ ，则  $FH =$  \_\_\_\_\_.



三、解答题(共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

17. (12 分)某企业生产的产品按质量分为一等品和二等品，该企业计划对现有生产设备进行改造，为了分析设备改造前后的效果，现从设备改造前后生产的大量产品中各抽取 200 件产品作为样本，产品的质量情况统计如表：

|       | 一等品 | 二等品 | 合计  |
|-------|-----|-----|-----|
| 设备改造前 | 120 | 80  | 200 |
| 设备改造后 | 150 | 50  | 200 |
| 合计    | 270 | 130 | 400 |

- (1)判断是否有 99%的把握，认为该企业生产的这种产品的质量与设备改造有关；  
 (2)按照分层抽样的方法，从设备改造前的产品中取得了 5 件产品，其中有 3 件一等品和 2 件二等品. 现从这 5 件产品中任选 2 件，求选出的这 2 件全是一等品的概率.

附： $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ，其中  $n = a+b+c+d$ .

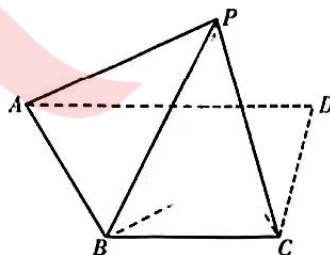
|                   |       |       |        |
|-------------------|-------|-------|--------|
| $P(K^2 \geq k_0)$ | 0.050 | 0.010 | 0.001  |
| $k_0$             | 3.841 | 6.635 | 10.828 |

18. (12 分)在等比数列  $\{a_n\}$  和等差数列  $\{b_n\}$  中， $a_1 = 2b_1 = 2$ ， $a_2 = 2b_2$ ， $a_3 = 2b_3 + 2$ .

(1)求数列  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  的通项公式；

(2)令  $c_n = \frac{b_n^2}{a_n}$ ，记数列  $\{c_n\}$  的前  $n$  项积为  $T_n$ ，其中  $T_1 = c_1$ ，证明： $T_n \leq \frac{9}{16}$ .

19. (12 分)如图，平面四边形  $ABCD$  中， $BC \parallel AD$ ， $\angle ADC = 90^\circ$ ， $\angle ABC = 120^\circ$ ， $E$  是  $AD$  上的一点， $AB = BC = 2DE = 4a (a > 0)$ ， $F$  是  $EC$  的中点，以  $EC$  为折痕把  $\triangle EDC$  折起，使点  $D$  到达点  $P$  的位置，且  $PC \perp BF$ .



- (1)证明：平面  $PEC \perp$  平面  $ABCE$ ；  
 (2)求点  $C$  到平面  $PAB$  的距离.

20. (12分) 设函数  $F(x) = (1-\lambda)\cos x + \lambda\cos a - \frac{\sin x - \sin a}{x-a}$ , 其中  $a \in (0, \frac{\pi}{2})$ .

(1) 若  $\lambda=1$ , 讨论  $F(x)$  在  $(a, \frac{\pi}{2})$  上的单调性;

(2) 若  $\lambda \leq \frac{1}{2}$ , 证明: 当  $x \in (a, \frac{\pi}{2})$  时, 不等式  $(x-a)F(x) < 0$  恒成立.

21. (12分) 在平面直角坐标系  $xOy$  中,  $O$  为坐标原点, 动点  $D(x, y)$  与定点  $F(\sqrt{3}, 0)$  的距离和  $D$  到定直线  $x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$  的距离的比是常数  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , 设动点  $D$  的轨迹为曲线  $C$ .

(1) 求曲线  $C$  的方程;

(2) 已知定点  $P(t, 0)$ ,  $-2 < t < 0$ , 过点  $P$  作垂直于  $x$  轴的直线  $l$ , 过点  $P$  作斜率大于 0 的直线  $l'$  与曲线  $C$  交于点  $G, H$ , 其中点  $G$  在  $x$  轴上方, 点  $H$  在  $x$  轴下方, 曲线  $C$  与  $x$  轴负半轴交于点  $A$ , 直线  $AG, AH$  与直线  $l$  分别交于点  $M, N$ , 若  $A, O, M, N$  四点共圆, 求  $t$  的值.

请考生在第 22、23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. (10分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在平面直角坐标系  $xOy$  中, 已知直线  $l$  的参数方程为  $\begin{cases} x = t \cos \alpha \\ y = 1 + t \sin \alpha \end{cases}$  ( $t$  为参数),  $\alpha$  为  $l$  的倾斜角, 且  $\alpha \in (0, \pi)$ , 以坐标原点为极点,  $x$  轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线  $C$  的极坐标方程为  $\rho^2 = \frac{2}{1 + \cos^2 \theta}$ .

(1) 求曲线  $C$  的直角坐标方程;

(2) 若直线  $l$  与曲线  $C$  交于  $A, B$  两点, 点  $P(0, 1)$  恰为线段  $AB$  的三等分点, 求  $\sin \alpha$ .

23. (10分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知  $f(x) = |2x + m|$  ( $m \in \mathbb{R}$ ).

(1) 当  $m=0$  时, 求不等式  $f(x) + |x-2| < 5$  的解集;

(2) 对于任意实数  $x$ , 不等式  $|2x-2| - f(x) < m^2$  成立, 求  $m$  的取值范围.